幾何学演習（2011 年 5 月 2 日）

担当：境 圭一

以下，$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ は C^r 級曲線 $(r \geq 3)$ で $|\alpha'(t)| = 1$ $(\forall t)$ と仮定し，$\{\kappa(t), \tau(t), \mathbf{T}(t), \mathbf{N}(t), \mathbf{B}(t)\}$ は α の Frenet-Serret 装置とする．

1. $\kappa(t)\tau(t) = -\langle \mathbf{T}'(t), \mathbf{B}'(t)\rangle$ を示せ（ヒント：Frenet-Serret の定理 (1), (3)）．
2. $\kappa(t) = 0$ $(\forall t)$ ならば，α は直線であることを示せ（ヒント：$\kappa = |\mathbf{T}'|$）．
3. $\alpha(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ 0 \end{pmatrix}$（$xy$ 平面内の曲線）のとき，$\kappa(t) = |x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|$, $\tau(t) = 0$ を示せ.
4. 任意の $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ に対し，$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = \langle \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$ とおき，$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ の**三重積**とよぶ.
   (1) $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = [\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}] = -[\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}]$ を示せ（ヒント：$\langle \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \det \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{pmatrix}$）．
   (2) $\kappa(t)^2\tau(t) = [\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t)]$ を示せ（ヒント：$0 = \langle \mathbf{B}, \mathbf{N}\rangle'$ が必要になる）．
5. $\alpha(t)$ は常に原点を中心とし半径 $r > 0$ の球面上にあるとする.
   (1) $\langle \alpha, \alpha\rangle' = 0$ を使って $\langle \alpha, \mathbf{T}\rangle = 0$, $\kappa\langle \alpha, \mathbf{N}\rangle = -1$ を示し，$\kappa(t) \neq 0$ $(\forall t)$ を示せ.

   ここで $\tau(t) \neq 0$ $(\forall t)$ と仮定する．$\rho(t) = 1/\kappa(t)$, $\sigma(t) = 1/\tau(t)$ とおく.

   (2) $\langle \alpha, \mathbf{N}\rangle'$ を計算することにより，$\langle \alpha, \mathbf{B}\rangle$ を ρ と σ で表せ.
   (3) 講義で示した補題を使って，$\alpha = -\rho\mathbf{N} - \rho'\sigma\mathbf{B}$ を示せ．訂正しました．お詫びします.
   (4) $|\alpha(t)| = r$ を使って，$\rho(t)^2 + (\rho'(t)\sigma(t))^2 = r^2$ を示せ.
6. ある定数ベクトル $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ が存在して $\langle \mathbf{T}(t), \mathbf{u}\rangle$ が定数となるとき，α を $\mathbf{u}$ **を軸とする一般らせん** (general helix) とよぶ.
   (1) らせん $\alpha(t) = \begin{pmatrix} r\cos\omega t \\ r\sin\omega t \\ h\omega t \end{pmatrix}$ $\left(\omega = \dfrac{1}{\sqrt{r^2 + h^2}}\right)$ は $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を軸とする一般らせんである（つまり，らせんは一般らせんに含まれる）ことを示せ.
   (2) 以下，α は $|\mathbf{u}| = 1$ であるような $\mathbf{u}$ を軸とする一般らせんで，$\kappa(t) \neq 0$ $(\forall t)$ であるとする．$\dfrac{d}{dt}\langle \mathbf{T}(t), \mathbf{u}\rangle$ を計算することにより，$\langle \mathbf{N}(t), \mathbf{u}\rangle = 0$ を示せ.
   (3) $\langle \mathbf{T}(t), \mathbf{u}\rangle = k$（定数）とおく．講義で示した補題を使って，$\mathbf{u} = a\mathbf{T} + b\mathbf{N} + c\mathbf{B}$ となる a, b, c を k で表せ（ヒント：$0 = \langle \mathbf{N}(t), \mathbf{u}\rangle'$ を計算する）．
   (4) $\tau(t)/\kappa(t)$ は定数となることを示せ.

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/11_geometry/11_geometry.html