幾何学演習（2011 年 5 月 9 日）

担当：境 圭一

$\boldsymbol{\alpha}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ は C^r 級曲線 $(r\geq 3)$ で $|\boldsymbol{\alpha}'|\equiv 1$ とし，$\{\kappa_\alpha,\tau_\alpha,\mathbf{T}_\alpha,\mathbf{N}_\alpha,\mathbf{B}_\alpha\}$ を $\boldsymbol{\alpha}$ の Frenet-Serret 装置とする．

1. $\boldsymbol{\beta}(t)=\boldsymbol{\alpha}(-t)$ とおく．

   (1) $|\boldsymbol{\beta}'|\equiv 1$ を示せ．

   (2) $\boldsymbol{\beta}$ の Frenet-Serret 装置 $\{\kappa_\beta,\tau_\beta,\dots\}$ を $\boldsymbol{\alpha}$ の Frenet-Serret 装置を使って表せ．

2. $\kappa_\alpha(t)>0$, $\tau_\alpha(t)>0$ $(\forall t)$ であると仮定し

$$\boldsymbol{\gamma}(t)=\int_0^t\mathbf{B}_\alpha(u)\,du,\quad \text{つまり}\quad \gamma^i(t)=\int_0^t B_\alpha^i(u)\,du,\ i=1,2,3$$

   とおく．

   (1) $|\boldsymbol{\gamma}'|\equiv 1$ を示せ．

   (2) $\boldsymbol{\gamma}$ の Frenet-Serret 装置 $\{\kappa_\gamma,\tau_\gamma,\dots\}$ を $\boldsymbol{\alpha}$ の Frenet-Serret 装置を使って表せ．

3. $\kappa(t)\neq 0\neq\tau(t)$ $(\forall t)$ と仮定し，$\rho=1/\kappa$, $\sigma=1/\tau$ とおく．さらに $\rho^2+(\rho'\sigma)^2\equiv r^2$, $\rho'(t)\neq 0$ $(\forall t)$ が成り立っていると仮定する．以下の手順で，$\boldsymbol{\alpha}$ が半径 r の球面上を動くことを示せ．

   (1) $\mathbf{u}=\boldsymbol{\alpha}+\rho\mathbf{N}+\rho'\sigma\mathbf{B}$ とおく．$\mathbf{u}'\equiv 0$（つまり $\mathbf{u}$ は定数ベクトル）を示せ．

   (2) $|\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{u}|\equiv r$, つまり $\boldsymbol{\alpha}$ は $\mathbf{u}$ を中心とし半径 r の球面上を動くことを示せ．

4. $\boldsymbol{\alpha}(0)=\mathbf{0}$, $\tau(0)\neq 0$, $\mathbf{T}(0)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{N}(0)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}(0)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ であるとする．

   (1) Frenet-Serret の定理を使って，$\mathbf{T}'(0)$, $\mathbf{N}'(0)$ を計算せよ．

   (2) (1) と Frenet-Serret の定理を使って $\mathbf{T}''(0)$ を $\kappa(0)$, $\kappa'(0)$, $\tau(0)$ を用いて表せ．

   (3) $\boldsymbol{\alpha}$ が $t=0$ のまわりで 3 次まで Taylor 展開できる，つまり

$$\boldsymbol{\alpha}(t)=t\boldsymbol{\alpha}'(0)+\frac{t^2}{2}\boldsymbol{\alpha}''(0)+\frac{t^3}{6}\boldsymbol{\alpha}'''(0)+\frac{t^4}{24}\mathbf{v}(t)$$

   となる $\mathbf{v}$ を取れると仮定する．$\boldsymbol{\alpha}(t)$ の第 3 成分 $\alpha^3(t)$ を，$\mathbf{v}(t)$ の第 3 成分 $v^3(t)$ と $\tau(0)$ を用いて表せ.（ヒント：$|\boldsymbol{\alpha}|\equiv 1$ だから $\boldsymbol{\alpha}''=\mathbf{T}'$, $\boldsymbol{\alpha}'''=\mathbf{T}''$）

   (4) 任意の（小さい）$\epsilon>0$ に対し，$\delta>0$ を十分小さく取れば，$|t|<\delta\Rightarrow|tv^3(t)|<\epsilon$ となる．このことを用いて，$t>0$ が十分小さいとき，$\alpha^3(t)$ と $\tau(0)$ の正負は一致することを示せ．

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/11_geometry/11_geometry.html