幾何学演習（2011 年 5 月 16 日）

担当：境 圭一

$\boldsymbol{\alpha} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ は C^r 級曲線 $(r \geq 3)$ で $|\boldsymbol{\alpha}'| \equiv 1$ とし，$\{\kappa, \tau, \mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ を $\boldsymbol{\alpha}$ の Frenet-Serret 装置とする．

1. （前回の 2. のために必要な問題です）

   (1) $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}| = 1$, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ とする．このとき

   $$\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\} \text{ が } \mathbb{R}^3 \text{ の右手系の正規直交基底} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

   である．このことから，$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ のとき，$\mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$, $\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{u}$ を示せ．

   (2) $\mathbf{T} = \mathbf{N} \times \mathbf{B}$, $\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}$ を示せ．

2. $\kappa \equiv c\tau$ となる定数 c が存在するとき，$\boldsymbol{\alpha}$ は一般らせんであることを，以下の手順で示せ．

   (1) $k = cl$, $k^2 + l^2 = 1$ となる定数 k, l が存在することを示せ．

   (2) (1) の k, l に対し $\mathbf{u} = l\mathbf{T} + k\mathbf{B}$ とおく．Frenet-Serret の定理を使って $\mathbf{u}' = 0$ を示せ．

   (3) $|\mathbf{u}| = 1$, $\langle \mathbf{T}, \mathbf{u} \rangle = l$（定数）を示せ．

3. $\kappa \equiv 1$, $\tau \equiv 0$ であるような曲線 $\boldsymbol{\alpha}$（ただし $|\boldsymbol{\alpha}'| \equiv 1$）を，以下の手順で求めよ．

   (1) そのような $\boldsymbol{\alpha}$ が存在すれば，$\mathbf{T}'' = -\mathbf{T}$ をみたすことを示せ．

   (2) 任意の定数ベクトル $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ に対し，$\mathbf{T} = (\cos t)\mathbf{u} + (\sin t)\mathbf{v}$ は (1) の微分方程式の解であることを確かめよ．

   (3) (2) の $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ を使って $\boldsymbol{\alpha}$ を表せ．

   (4) $\boldsymbol{\alpha}(0) = \mathbf{0}$, $\mathbf{T}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{N}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とするとき，$\boldsymbol{\alpha}$ を求めよ．

   (5) (4) で求めた $\boldsymbol{\alpha}$ に対し，実際に $\kappa_{\alpha} \equiv 1$, $\tau_{\alpha} \equiv 0$ であることを確かめよ．

（ヒント）

1. (1) $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ が右手系なら，$\{\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}\}$, $\{\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ もそう．

2. (1) k, l は具体的に求められるが，具体的な値は (2) では必要ない．

3. (1) Frenet-Serret の定理 (1), (2) を使う．(3) $\mathbf{T} = \boldsymbol{\alpha}'$ より $\displaystyle\int_0^t \mathbf{T}(s)\, ds = \boldsymbol{\alpha}(t) - \boldsymbol{\alpha}(0)$.

`http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/11_geometry/11_geometry.html`