幾何学演習（2011 年 5 月 23 日）

担当：境 圭一

1. 3×3 行列の行列式 $\begin{vmatrix}\mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w}\end{vmatrix} > 0$ のとき，$\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\}$ は $\mathbb{R}^3$ の**右手系の基底**をなすという．

   (1) $\begin{vmatrix}\mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w}\end{vmatrix} = \langle \mathbf{u}\times\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$ を示せ．また，$\mathbf{u},\mathbf{v}$ が一次独立であるとき，$\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{u}\times\mathbf{v}\}$ は右手系の基底をなすことを示せ．

   (2) $\mathbf{e}_1=(1,0,0)$, $\mathbf{e}_2=(0,1,0)$, $\mathbf{e}_3=(0,0,1)$ とする．$\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ は右手系であることを示せ．また，正規直交基底 $\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\}$ を回転させて $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ に重ね合わせられるとき，$\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\}$ は右手系であることを示せ．

2. 曲線 $\boldsymbol{\alpha}(t) = (\cos t,\, \sin t,\, t^2/2)$ を考える．

   (1) $|\boldsymbol{\alpha}'(t)|$ を計算し，$\boldsymbol{\alpha}$ が正則曲線であることを示せ．

   (2) $z=(e-e^{-1})/2$ とおく．$\boldsymbol{\alpha}$ の長さ $\displaystyle\int_0^z |\boldsymbol{\alpha}'(t)|dt$ を，変数変換 $t=(e^x-e^{-x})/2$ を用いて計算せよ．

3. 曲線 $\boldsymbol{\alpha}(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\Bigl(\sqrt{1+t^2},\, t,\, \log\bigl(t+\sqrt{1+t^2}\bigr)\Bigr)$ を考える．

   (1) $|\boldsymbol{\alpha}'(t)|=1$ を示し，接ベクトル場 $\mathbf{T}(t)$ を求めよ．

   (2) 曲率 κ を求め，$0\le t\le 1$ における全曲率 $\displaystyle\int_0^1 \kappa(t)dt$ を計算せよ．

4. 曲率 $\kappa(t)>0$（定数とは限らない），捩率 $\tau\equiv 0$ の曲線 $\boldsymbol{\alpha}(t)$ を考える．

   (1) Frenet-Serret の定理を使って $\mathbf{T}''(t) = \dfrac{\kappa'(t)}{\kappa(t)}\mathbf{T}'(t) - \kappa(t)^2\mathbf{T}(t)$ を示せ．

   (2) $[0,t]$ における全曲率 $K(t) := \displaystyle\int_0^t \kappa(u)du$ を考える．$\kappa(t)>0$ より K は単調増大で，逆関数 K^{-1} を持つ．$\mathbf{S}(t)=\mathbf{T}(K^{-1}(t))$ とおくとき，$\mathbf{S}''\equiv -\mathbf{S}$ を示せ．

   (3) $\kappa(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ のとき，$\mathbf{T}(t)$ を求めよ．

（ヒント）

1. (2) $\tilde{\mathbf{u}}$ は $\mathbf{u}$ を回転して得られる $\Leftrightarrow$ $\det A = 1$ であるような A が存在して $\tilde{\mathbf{u}} = A\mathbf{u}$.

2. (2) 関数 $t=\sinh(x)=(e^x-e^{-x})/2$ は単調増大なので，$0\le t\le z$ のとき $0\le x\le 1$.

3. (2) 全曲率の計算では $t=\tan x$ とおくとよい．

4. (2) $\mathbf{T}(t)=\mathbf{S}(K(t))$ だから $\mathbf{T}'(t)=\mathbf{S}'(K(t))K'(t)=\mathbf{S}'(K(t))\kappa(t)$. $\mathbf{T}''(t)$ も $\mathbf{S}''(K(t))$ を用いて表し，(1) に代入する．

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/11_geometry/11_geometry.html