幾何学演習（2011 年 6 月 6 日）

担当：境 圭一

1. 2 次元球面

$$S^2 := \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$$

が滑らかな曲面であることを示したい．

(1) $x = (x^1, x^2, x^3) \in S^2$, $x^3 > 0$ の近傍のパラメータ付けとして，講義でやった

$$U := \{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (u^1)^2 + (u^2)^2 < 1\}, \quad V := \{(x^1, x^2, x^3) \in S^2 \,|\, x^3 > 0\},$$
$$\varphi : U \to V, \quad \varphi(u^1, u^2) := \left(u^1, u^2, \sqrt{1 - (u^1)^2 - (u^2)^2}\right)$$

を考える．これらが実際にパラメータ付けになっていること，つまり

- $U \subset \mathbb{R}^2$ は開集合,
- $V \subset S^2$ は（$\mathbb{R}^3$ の部分集合としての相対位相について）x の開近傍,
- φ は C^∞ 級全単射で，逆写像 φ^{-1} も C^∞ 級

であることを示せ．

(2) (1) を参考にして，$(0, 0, -1) \in S^2$ の近傍の局所パラメータ付けを与えよ．

(3) $(1, 0, 0) \in S^2$ の近傍のパラメータ付けはどのように与えればよいか．

2. $(0, 0, 1) \in S^2$ の近傍のパラメータ付けとして，前問とは異なるものを考える．

(1) x^1x^2 平面 $\{(x^1, x^2, 0) \in \mathbb{R}^3\}$ 上の点 $u = (u^1, u^2, 0)$ に対し，u と $(0, 0, -1) \in S^2$ を結ぶ直線 l_u を考え，l_u と S^2 の交点を $\varphi(u)$ とする．$\varphi(u)$ を u^1, u^2 を用いて表せ．

(2) $U := \mathbb{R}^2$ とし，$(0, 0, 1)$ の近傍として

$$V = S^2 \setminus \{(0, 0, -1)\} = \{x \in S^2 \,|\, x \neq (0, 0, -1)\}$$

を考える．$V \subset S^2$ は開集合であることを示せ．また，(1) の φ は C^∞ 級全単射 $\varphi : U \to V$ を与えることを示せ．

(3) $\varphi^{-1} : V \to U$ も C^∞ 級であることを示せ．

(4) $\dfrac{\partial \varphi}{\partial u^1}, \dfrac{\partial \varphi}{\partial u^2} : U \to \mathbb{R}^3$ を計算せよ．任意の $u \in U$ に対し，$\dfrac{\partial \varphi}{\partial u^1}(u), \dfrac{\partial \varphi}{\partial u^2}(u)$ は一次独立であることを示せ．

（ヒント）$V \subset S^2$ が開集合であることを示すには，1. (1) では $W = \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^3 > 0\}$, 2. (2) では $W = \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^3 > -1\}$ を考える．