幾何学演習（2011 年 6 月 13 日）

担当：境 圭一

1. (1) $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ に対し

$$x = r\cos\beta\cos\alpha, \quad y = r\cos\beta\sin\alpha, \quad z = r\sin\beta$$

となる $r \geq 0$, $\alpha \in [0, 2\pi)$, $\beta \in [-\pi/2, \pi/2]$ を取れることを示せ（これを $\mathbb{R}^3$ の**極座標**とよぶ）.

(2) 極座標を使うと，$S^2 = \{(r, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^3 \mid r = 1\}$ である．極座標を使って，$r = 1$, $\alpha = \beta = 0$ に対応する S^2 上の点のまわりの局所パラメータ付けを与えよ.

2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を，$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ で定義する.

(1) $M := f^{-1}(0)$ とおく．M の概形を描け.

(2) M は滑らかな曲面であることを，局所パラメータ付けを与えることにより示せ.

(3) $f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ などとおく．f_x, f_y, f_z を計算し，f の臨界点 ($f_x(v) = f_y(v) = f_z(v) = 0$ となる $v \in \mathbb{R}^3$) は存在しないことを示せ.

3. $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を，$g(x, y, z) = xy - z$ で定義する.

(1) $M := g^{-1}(0)$ とおく．M の概形を描け.

(2) M は滑らかな曲面であることを，局所パラメータ付けを与えることにより示せ.

(3) g の臨界点は存在しないことを示せ.

4. $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を，$h(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 + 1$ で定義する.

(1) $M := h^{-1}(0)$ とおく．M の概形を描け.

(2) M は滑らかな曲面であることを，局所パラメータ付けを与えることにより示せ.

(3) h の臨界点を求め，h の臨界値は 1 のみであることを示せ.

(4) $N := h^{-1}(1) \subset \mathbb{R}^3$ の概形を描け．N が滑らかな曲面でないことを説明せよ.

（ヒント）

1. r は原点と (x, y, z) の間の距離である.

2. (1) 平面 $z = z_0$ ($z_0 > 0$ は定数) で切った切り口を考えるか，円柱座標を使うとよい.

3. (1) z 軸に平行な 4 つの平面 $x = 0$, $y = 0$, $x = y$, $x = -y$ で切ってみるとよい.

4. (1) 平面 $z = z_0$ で切ってみるか，円柱座標を使うとよい.

(4) $\mathbb{R}^3$ の原点の近傍において，N の形に注目するとよい.

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/11_geometry/11_geometry.html