幾何学演習（2011 年 6 月 20 日）

担当：境 圭一

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級関数とし，曲面 $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = f(x, y)\}$ を考える．$p := (a, b, f(a, b)) \in M$ のまわりの局所パラメータ付けを次のように取る：

$$U : (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{の適当な開近傍}, \quad V := \{(x,y,z) \in M \,|\, (x,y) \in U,\ z = f(x,y)\},$$
$$\boldsymbol{\varphi} : U \to V, \quad \boldsymbol{\varphi}(x,y) := (x, y, f(x,y))$$

   (1) T_pM の基底 $\boldsymbol{\varphi}_x := \dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x}(a,b)$, $\boldsymbol{\varphi}_y := \dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial y}(a,b)$, 法ベクトル $\mathbf{n} := \boldsymbol{\varphi}_x \times \boldsymbol{\varphi}_y$ を計算せよ．

   (2) T_pM を表す方程式を求めよ．

   (3) $p \in M$ において，実際に M と接する平面 H_p の方程式を求めよ．

   (4) f と p が次の形のとき，M の概形を描き，H_p を求めよ：
   - $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ （ただし $x^2 + y^2 < 1$ とする），$p = (1/2,\, 1/2,\, 1/\sqrt{2})$
   - $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$, $p = (\sqrt{2}, 1, 2)$
   - $f(x,y) = x + y$, $p = (0,0,0)$

2. $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を，$g(x,y,z) = x^2 + y^2 + (z/2)^2$ で定義する．$M = g^{-1}(1)$ は楕円体である．$p = (1/2,\, \sqrt{3}/2,\, 0) \in M$ とする．

   (1) $g_x(p) \neq 0$, $g_z(p) = 0$ を計算して確かめよ．

   (2) $p \in M$ の任意の近傍 $V \subset M$ は，関数 F を使って $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = F(x,y)\}$ と表すことはできないことを示せ．

   (3) p の近傍 $V \subset M$ に対し，$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = G(y,z)\}$ となる関数 G を求めよ．

   (4) 1. (1), (2) を参考にして，T_pM の方程式を求めよ．

3. (1) $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を $h(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ で定義し，$S^2 = h^{-1}(1)$ を考える．1. (2) を参考にして，$p = (a,b,c) \in S^2$ における接平面 T_pS^2 を表す方程式を求めよ．

   (2) $\mathbf{u} := (h_x(p), h_y(p), h_z(p)) \in \mathbb{R}^3$ とおく．$\mathbf{u}$ は T_pS^2 と直交することを示せ．

（ヒント）

1. (2) $\mathbf{v} = (x,y,z) \in T_pM$ とすると，T_pM は $\mathbf{n}$ と直交する平面だから $\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle = 0$. このことから x, y, z がみたす方程式を求める．

   (3) T_pM はベクトル空間だから原点を通る．T_pM を p だけ平行移動したものが H_p.

2. (2) できるとすれば $F(x,y) = \pm 2\sqrt{1 - x^2 - y^2}$. 符号 $\pm$ はどうなるか?

   (4) 局所パラメータ付けとして $\boldsymbol{\varphi}(y,z) := (G(y,z), y, z)$ をとる．T_pM の基底は $\boldsymbol{\varphi}_y$, $\boldsymbol{\varphi}_z$.