幾何学演習（2011 年 6 月 27 日）

担当：境 圭一

以下，$\boldsymbol{\varphi}_1 := \dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u^1}$, $\boldsymbol{\varphi}_2 := \dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u^2}$ と書く.

1. $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2=1\}$ とし,「北半球」の局所パラメータ付け

$$U := \{(u^1,u^2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (u^1)^2+(u^2)^2<1\}, \quad V := \{(x,y,z) \in S^2 \,|\, z>0\},$$
$$\boldsymbol{\varphi} : U \to V, \quad \boldsymbol{\varphi}(u^1,u^2) := \left(u^1,\, u^2,\, \sqrt{1-(u^1)^2-(u^2)^2}\right)$$

を取る．また，定数 $a \in \mathbb{R}$ に対し，曲線 $\boldsymbol{\alpha}_a : (0, \pi/\sqrt{1+a^2}) \to U$ を次で定義する：

$$\boldsymbol{\alpha}_a(t) := \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\left(\cos\left(\sqrt{1+a^2}\,t\right), a\right)$$

(1) S^2 上の曲線 $\boldsymbol{\gamma}_a := \boldsymbol{\varphi} \circ \boldsymbol{\alpha}_a$ を考える．$\mathbf{T}_a(t) := \boldsymbol{\gamma}_a'(t)$ について，$|\mathbf{T}_a| \equiv 1$ を示せ.

(2) $\boldsymbol{\gamma}_a''(t)$ を求めよ.

(3) $\mathbf{u} := (u^1,u^2)$ と書く．$\boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{u})$ $(i=1,2)$ および $\mathbf{n}(\mathbf{u}) := \dfrac{\boldsymbol{\varphi}_1(\mathbf{u}) \times \boldsymbol{\varphi}_2(\mathbf{u})}{|\boldsymbol{\varphi}_1(\mathbf{u}) \times \boldsymbol{\varphi}_2(\mathbf{u})|}$ を求めよ.

(4) 内在的法ベクトル $\mathbf{S}_a(t) := \mathbf{n}(\boldsymbol{\alpha}_a(t)) \times \mathbf{T}_a(t)$ を求めよ.

(5) 測地的曲率 $\kappa_g(t) := \langle \boldsymbol{\gamma}_a''(t), \mathbf{S}_a(t) \rangle$, 法曲率 $\kappa_n(t) := \langle \boldsymbol{\gamma}_a''(t), \mathbf{n}(\boldsymbol{\alpha}_a(t)) \rangle$ を計算せよ．また，$\kappa_g(t) \equiv 0$ となる a, そのときの $\boldsymbol{\gamma}_a(t)$ を求めよ.

2. 双曲面 $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2=z^2-1,\ z \geq 1\}$ を考える．局所パラメータ付け

$$\boldsymbol{\varphi} : \mathbb{R}^2 \to M, \quad (u^1,u^2) \mapsto (u^1, u^2, \sqrt{(u^1)^2+(u^2)^2+1})$$

に関する第一基本形式 $g_{ij} := \langle \boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{\varphi}_j \rangle$ $(i,j=1,2)$ を計算せよ.

3. $K := \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -1<\alpha<1,\ 0 \leq \beta < \pi\}$ とする．$\mathbb{R}^3$ の円柱座標 (r,θ,z) を使って，$F : K \to \mathbb{R}^3$ を次のように定義する：

$$F(\alpha,\beta) := (2+(\cos\beta)\alpha,\, 2\beta,\, (\sin\beta)\alpha)$$

(1) $M := F(K) \subset \mathbb{R}^3$ の概形を描け.（ヒント：$\theta = 2\beta$ を固定したとき，α を消去すると，$z = (\tan\beta)(r-2)$, また $(r-2)^2+z^2=\alpha^2<1$ である）

(2) 法ベクトル $\mathbf{n}(\alpha,\beta) := \dfrac{F_\alpha(\alpha,\beta) \times F_\beta(\alpha,\beta)}{|F_\alpha(\alpha,\beta) \times F_\beta(\alpha,\beta)|}$ を求めよ．ただし $F_\alpha := \dfrac{\partial F}{\partial \alpha}$, $F_\beta := \dfrac{\partial F}{\partial \beta}$.

(3) $\displaystyle\lim_{\beta \to \pi} F(0,\beta) = F(0,0)$ である．$\displaystyle\lim_{\beta \to \pi} \mathbf{n}(0,\beta)$ と $\mathbf{n}(0,0)$ は一致するか?