担当:境 圭一

以下, $oldsymbol{arphi}_1:=rac{\partial oldsymbol{arphi}}{\partial u^1},\, oldsymbol{arphi}_2:=rac{\partial oldsymbol{arphi}}{\partial u^2}$ と書く.

 $1. \,\,\, S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  とし「北半球」の局所パラメータ付け

$$\begin{split} U := \{ (u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \, | \, (u^1)^2 + (u^2)^2 < 1 \}, \quad V := \{ (x, y, z) \in S^2 \, | \, z > 0 \}, \\ \varphi : U \to V, \quad \varphi(u^1, u^2) := \left( u^1, \, u^2, \, \sqrt{1 - (u^1)^2 - (u^2)^2} \right) \end{split}$$

を取る.また,定数  $a\in\mathbb{R}$  に対し,曲線  $\boldsymbol{\alpha}_a:(0,\pi/\sqrt{1+a^2})\to U$  を次で定義する:

$$\boldsymbol{\alpha}_a(t) := \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \left( \cos \left( \sqrt{1+a^2} \, t \right), a \right)$$

- (1)  $S^2$  上の曲線  $\gamma_a:=oldsymbol{arphi}\circoldsymbol{lpha}_a$  を考える .  $\mathbf{T}_a(t):=oldsymbol{\gamma}_a'(t)$  について ,  $|\mathbf{T}_a|\equiv 1$  を示せ .
- (2)  $\gamma''_a(t)$  を求めよ.
- (3)  $\mathbf{u}:=(u^1,u^2)$  と書く. $\boldsymbol{arphi}_i(\mathbf{u})$  (i=1,2) および  $\mathbf{n}(\mathbf{u}):=rac{oldsymbol{arphi}_1(\mathbf{u}) imesoldsymbol{arphi}_2(\mathbf{u})}{|oldsymbol{arphi}_1(\mathbf{u}) imesoldsymbol{arphi}_2(\mathbf{u})|}$  を求めよ.
- (4) 内在的法ベクトル  $\mathbf{S}_a(t) := \mathbf{n}(\boldsymbol{\alpha}_a(t)) \times \mathbf{T}_a(t)$  を求めよ.
- (5) 測地的曲率  $\kappa_g(t) := \langle \gamma_a''(t), \mathbf{S}_a(t) \rangle$ , 法曲率  $\kappa_n(t) := \langle \gamma_a''(t), \mathbf{n}(\alpha_a(t)) \rangle$  を計算せよ.また, $\kappa_g(t) \equiv 0$  となる a,そのときの  $\gamma_a(t)$  を求めよ.
- 2. 双曲面  $M:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,x^2+y^2=z^2-1,\,\,z\geq 1\}$  を考える.局所パラメータ付け

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \to M, \quad (u^1, u^2) \mapsto (u^1, u^2, \sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2 + 1})$$

に関する第一基本形式  $g_{ij} := \langle oldsymbol{arphi}_i, oldsymbol{arphi}_i 
angle \ (i,j=1,2)$  を計算せよ.

3.  $K:=\{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\,|\, -1<\alpha<1,\ 0\leq\beta<\pi\}$  とする. $\mathbb{R}^3$  の円柱座標  $(r,\theta,z)$  を使って, $F:K\to\mathbb{R}^3$  を次のように定義する:

$$F(\alpha, \beta) := (2 + (\cos \beta)\alpha, 2\beta, (\sin \beta)\alpha)$$

- (1)  $M:=F(K)\subset\mathbb{R}^3$  の概形を描け(ヒント: $\theta=2\beta$  を固定したとき, $\alpha$  を消去すると,z=( aneta)(r-2),また  $(r-2)^2+z^2=lpha^2<1$  である)
- (2)**法** $ベクトル <math>\mathbf{n}(\alpha,\beta) := \frac{F_{\alpha}(\alpha,\beta) \times F_{\beta}(\alpha,\beta)}{|F_{\alpha}(\alpha,\beta) \times F_{\beta}(\alpha,\beta)|}$ を求めよ . ただし  $F_{\alpha} := \frac{\partial F}{\partial \alpha}, F_{\beta} := \frac{\partial F}{\partial \beta}.$
- (3)  $\lim_{\beta \to \pi} F(0,\beta) = F(0,0)$  である .  $\lim_{\beta \to \pi} \mathbf{n}(0,\beta)$  と  $\mathbf{n}(0,0)$  は一致するか?