幾何学演習（2011年7月4日）

担当：境 圭一

以下，$\boldsymbol{\varphi}_i = \dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u^i}$, $\boldsymbol{\varphi}_{ij} = \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{\varphi}}{\partial u^i \partial u^j}$ などとする．

1. 滑らかな曲面 $M \subset \mathbb{R}^3$ の局所パラメータ付け $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3) : U \xrightarrow{\cong} V$ ($U \subset \mathbb{R}^2$, $V \subset M$) を取る．$\boldsymbol{\varphi}$ の逆写像を $\boldsymbol{\psi} = (\psi^1, \psi^2) : V \to U$ とする．

   (1) $\boldsymbol{\Phi} := \boldsymbol{\psi} \circ \boldsymbol{\varphi} : U \to U$ とおく．$\boldsymbol{\Phi}_i$ $(i = 1, 2)$ を φ, $\boldsymbol{\psi}$ を使って表せ．

   (2) $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\varphi}^{-1}$ だから $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} = (u^1, u^2)$ である．このことと (1) から
   $$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}_1 & \boldsymbol{\psi}_2 & \boldsymbol{\psi}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varphi}_1 & \boldsymbol{\varphi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   を示せ．ただし $\boldsymbol{\varphi}_i$, $\boldsymbol{\psi}_i$ はいずれも縦ベクトルとみなしている（よって左辺の行列
   $$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}_1 & \boldsymbol{\psi}_2 & \boldsymbol{\psi}_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varphi}_1 & \boldsymbol{\varphi}_2 \end{pmatrix}$$
   はそれぞれ 2×3, 3×2 行列であり，その積は 2×2 行列）．

   (3) $\boldsymbol{\varphi}_1$ と $\boldsymbol{\varphi}_2$ は一次独立であることを示せ．(ヒント：$\mathrm{rank}(B) = 2$ を言えばよい．一般に $\mathrm{rank}(AB) \le \mathrm{rank}(B)$ である）

   (4) $\boldsymbol{\varphi}$ に関する第一基本形式を $g_{ij} := \langle \boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{\varphi}_j \rangle$ とし，2×2 行列 $G = (g_{ij})$ を考える．$\det G = |\boldsymbol{\varphi}_1 \times \boldsymbol{\varphi}_2|^2$ を示せ．（ヒント：$g_{12} g_{21} = \langle \boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2 \rangle^2 = g_{11} g_{22} \cos^2 \theta$）

   (5) (3), (4) から $\det G \neq 0$ を示せ．

2. $S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ の次のような局所パラメータ付けを考える：
   $$U := \{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (u^1)^2 + (u^2)^2 < 1\}, \quad V = \{(x, y, z) \in S^2 \,|\, x > 0\},$$
   $$\boldsymbol{\varphi} : U \to V, \quad \boldsymbol{\varphi}(u^1, u^2) := \left(\sqrt{1 - (u^1)^2 - (u^2)^2},\, u^1,\, u^2\right)$$

   (1) $\boldsymbol{\alpha} : (-\pi/2, \pi/2) \to U$ を $\boldsymbol{\alpha}(t) = (\alpha^1(t), \alpha^2(t)) := (\sin t, 0)$ で定義し，S^2 上の曲線 $\boldsymbol{\gamma}(t) = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}(t))$ を考える．$|\boldsymbol{\gamma}'| \equiv 1$ を確かめよ．

   (2) $g_{ij}(\mathbf{u}) := \langle \boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varphi}_j(\mathbf{u}) \rangle$ $(i, j = 1, 2)$ を計算し，2×2 行列 $G(\mathbf{u}) = (g_{ij}(\mathbf{u}))$ の逆行列 $G^{-1}(\mathbf{u}) = (g^{ij}(\mathbf{u}))$ を求めよ．さらに $g_{ij}(\boldsymbol{\alpha}(t))$, $g^{ij}(\boldsymbol{\alpha}(t))$ を求めよ．

   (3) $\boldsymbol{\varphi}_{ij}$ $(i, j = 1, 2)$ を計算し，$\boldsymbol{\varphi}_{ij}(\boldsymbol{\alpha}(t))$ を求めよ．$\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}(t)$ における Christoffel の記号 $\Gamma^k_{ij}(\boldsymbol{\alpha}(t)) = \displaystyle\sum_{l=1,2} \langle \boldsymbol{\varphi}_{ij}(\boldsymbol{\alpha}(t)), \boldsymbol{\varphi}_l(\boldsymbol{\alpha}(t)) \rangle g^{lk}(\boldsymbol{\alpha}(t))$ を t の式で表せ．

   (4) $\boldsymbol{\gamma}$ は測地線である，つまり $k = 1, 2$ に対し次が成り立つことを示せ：
   $$\sum_{i,j=1,2} \Gamma^k_{ij}(\boldsymbol{\alpha}(t)) \cdot (\alpha^i)'(t) \cdot (\alpha^j)'(t) + (\alpha^k)''(t) = 0$$

   (5) $L_{ij}(\boldsymbol{\alpha}(t)) := \langle \boldsymbol{\varphi}_{ij}(\boldsymbol{\alpha}(t)), \mathbf{n}(\boldsymbol{\alpha}(t)) \rangle$ を使って $\kappa_n(t) = \displaystyle\sum_{i,j=1,2} L_{ij}(\boldsymbol{\alpha}(t)) (\alpha^i)'(t) (\alpha^j)'(t)$ を求めよ．