幾何学演習（2011年7月11日）

担当：境 圭一

以下，$\boldsymbol{\varphi}_i = \dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u^i}$ などとする．また，$0 < a < 1$ に対し，$U_a := \{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid (u^1)^2 + (u^2)^2 < a^2\}$ とおく．

1. 放物面 $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2\}$ 上の点 $p := (0, 0, 0)$ のまわりの局所パラメータ付けとして，次のものを取る：

$$\boldsymbol{\varphi} : U_a \to V_a := \{(x, y, z) \in M \mid z < a^2\}, \quad \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}) := (u^1, u^2, (u^1)^2 + (u^2)^2)$$

   (1) $\mathbf{u}_0 := \boldsymbol{\varphi}^{-1}(p) \in \mathbb{R}^2$ を求めよ．

   (2) $\boldsymbol{\varphi}_i$ $(i = 1, 2)$ を計算し，$\mathbf{n} := \dfrac{\boldsymbol{\varphi}_1 \times \boldsymbol{\varphi}_2}{|\boldsymbol{\varphi}_1 \times \boldsymbol{\varphi}_2|}$ を求めよ．また $\mathbf{n}(\mathbf{u}_0) \in S^2$ の座標を求めよ．

   (3) $\mathbf{n}_i$ $(i = 1, 2)$ を求めよ．$\mathbf{n}(\mathbf{u}_0) \in S^2$ における法ベクトル $\mathbf{n}_1(\mathbf{u}_0) \times \mathbf{n}_2(\mathbf{u}_0)$ が外向きか，あるいは内向きか調べ，p における Gauss 曲率 $K(p)$ の正負を答えよ．

2. 円柱 $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ 上の点 $p := (1, 0, 0)$ のまわりの局所パラメータ付けとして，次のものを取る：

$$\boldsymbol{\varphi} : U_a \to V_a := \{(x, y, z) \in M \mid x > 0,\ y^2 + z^2 < a^2\}, \quad \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}) := (\sqrt{1 - (u^1)^2},\ u^1,\ u^2)$$

   (1) $\boldsymbol{\varphi}_i$ $(i = 1, 2)$ を計算し，$\mathbf{n} := \dfrac{\boldsymbol{\varphi}_1 \times \boldsymbol{\varphi}_2}{|\boldsymbol{\varphi}_1 \times \boldsymbol{\varphi}_2|}$ を求めよ．

   (2) $\mathbf{n}(U_a) \subset M$ はどんな集合か．$\mathbf{n}(U_a)$ の面積を求めよ．

   (3) p における Gauss 曲率 $K(p)$ を求めよ．

3. 双曲面 $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2 + 1\}$ 上の点 $p := (1, 0, 0)$ のまわりの局所パラメータ付けとして，次のものを取る：

$$\boldsymbol{\varphi} : U_a \to V_a := \{(x, y, z) \in M \mid x > 0,\ y^2 + z^2 < a^2\},$$
$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}) := (\sqrt{1 - (u^1)^2 + (u^2)^2},\ u^1,\ u^2)$$

   問題 1. と同様の手順で，p における Gauss 曲率 $K(p)$ の正負を調べよ．