幾何学演習レポート問題 1（2011 年 4 月 18 日）略解・コメント

担当：境 圭一

1. (1) 第一成分は

$$\alpha^2(t)(\alpha^3(t))' - \alpha^3(t)(\alpha^2(t))'$$

である．これが 0 だから

$$\frac{(\alpha^2(t))'}{\alpha^2(t)} = \frac{(\alpha^3(t))'}{\alpha^3(t)}, \quad \text{よって} \quad \log\alpha^3(t) = \log\alpha^2(t) + A = \log e^A\alpha^2(t)$$

（ただし A は定数）．$C = e^A$ とおけばよい．

(2) (1) と同様にすると，定数 $C, C' > 0$ が存在して

$$C'\alpha^1(t) = C\alpha^2(t) = \alpha^3(t)$$

となる．よって曲線 α は原点を通る直線の一部を描く．

2. (1) $\alpha'(t) = \begin{pmatrix} \frac{4}{5}\cos t \\ \sin t \\ \frac{3}{5}\cos t \end{pmatrix}$.

(2) (1) より

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\cos t\right)^2 + \sin^2 t + \left(\frac{3}{5}\cos t\right)^2} = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$$

だから，曲線の長さは

$$\int_0^{2\pi} |\alpha'(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

1. (1) では定数項を忘れないようにしてください．(2) では「どのような軌跡を描くか」と問われているので「このような軌跡」と言葉で説明してください．直線全体とは限らないことに注意してください.「全ての t に対し $\alpha'(t) = \mathbf{0}$ の場合，軌跡は一点」と書いてくれた人もいました．これはその通りで，α が定値写像になる場合は（あまり意味がないので）省いておくべきでした．すみません．

2. は簡単な計算で，たまに符号を間違えた人はいましたが，おおむね問題なかったようです．講義では正則曲線の場合だけ長さを定義したので，α が正則であることを確認してくれた人もいましたが，長さ自体は正則でなくても（通常の意味の「長さ」とは違うものになる場合はありますが）定義できます．

今後のため，レポートの体裁はある程度整える習慣をつけてください．