

幾何学演習レポート問題 2 (2011 年 6 月 13 日)

担当: 境 圭一

$X = \mathbb{R}^3 - \{z \text{ 軸上の点} \}$ とする .

1. $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ を C^∞ 級関数とする . $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ などと書くことにする .

- (1) (r, θ, z) を \mathbb{R}^3 の円柱座標とする (つまり, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ とおく) .
 $g(r, \theta, z) = f(r \cos \theta, r \sin \theta, z)$ とおくととき, g_r, g_θ, g_z を f_x, f_y, f_z を用いて表せ .
- (2) $v = (x, y, z)$ が f の臨界点 (つまり $f_x(v) = f_y(v) = f_z(v) = 0$ となる) とする .
 $v = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$ となる (r, θ, z) は g の臨界点であることを示せ .
- (3) 逆に, $w = (r, \theta, z)$ が g の臨界点であるとき, $(x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$ で定まる (x, y, z) は f の臨界点であることを示せ .

2. $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ を, 円柱座標を用いて $f(r, \theta, z) = (r - 2)^2 + z^2 - 1$ で定義する .

- (1) $M = f^{-1}(0)$ とおく . M の概形を描け .
- (2) f の臨界点を求めよ .
- (3) M は滑らかな曲面であることを示せ .

(ヒント)

1. (1) 合成関数の微分を使う . 微分積分の教科書には必ず載っています .

(2) (1) の答をよくみると, 3×3 行列 A を使って $\begin{pmatrix} g_r \\ g_\theta \\ g_z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$ となっている .

(3) (2) の A が逆行列をもつことを示すとよい .

2. (1) 例えば, 平面 $\theta = 0$ で切った切り口は, $(r, z) = (2, 0)$ を中心とする半径 1 の円である . これを z 軸のまわりに一回転したものが M になる .

(2) 1. (2), (3) により, 通常 xyz 座標に戻す必要はなく, 円柱座標のまま微分を計算すればよいことになる .

(3) 講義でやった定理 4.1 を使う .

6/24 (金) までに, 理学部 A 棟 403 に提出してください .

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/11_geometry/11_geometry.html