幾何学演習レポート問題 2（2011 年 6 月 13 日）略解

担当：境 圭一

1. (1) $\dfrac{\partial g}{\partial r} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial(r\cos\theta)}{\partial r} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial(r\sin\theta)}{\partial r} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial r}$ より，$g_r = f_x\cos\theta + f_y\sin\theta$. 同様に，$g_\theta = -f_x r\sin\theta + f_y r\cos\theta$, $g_z = f_z$.

   (2) (1) より

$$\begin{pmatrix} g_r \\ g_\theta \\ g_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$$

   であることがわかる．よって $f_x = f_y = f_z = 0$ となる点においては，$g_r = g_\theta = g_z = 0$ となることがわかる．

   (3) (2) の 3×3 行列を A とすると，$\det A = r$ である．$X = \mathbb{R}^3 - \{z$ 軸上の点$\}$ においては $r \neq 0$ だから $\det A \neq 0$. よって A^{-1} が存在し

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} g_r \\ g_\theta \\ g_z \end{pmatrix}$$

   となるから，$g_r = g_\theta = g_z = 0$ となる点では $f_x = f_y = f_z = 0$ となる．

2. (1) M は図 1 のようなトーラスである．xz 平面での切り口は，半径 1 の円．

   (2) $f_r = 2(r-2)$, $f_\theta = 0$, $f_z = 2z$. これらがすべて 0 になる点は，円柱座標で $(2,\theta,0)$（ただし θ は任意）．

   (3) (2) より，f の臨界値は $f(2,\theta,0) = -1$ のみ．よって 0 は正則値だから，講義の定理 4.1 より，$M = f^{-1}(0)$ は滑らかな曲面である．

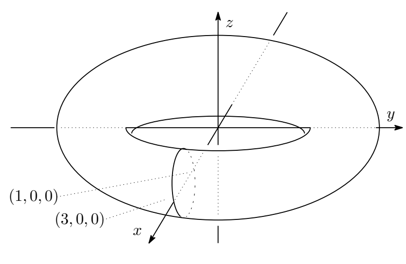

図 1: トーラス

（コメント）出来は良かったようです．1. (2) の行列 A が逆行列を持つことを述べるとき「$r \neq 0$ だから」ということをひとこと注意してください．

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/11_geometry/11_geometry.html