幾何学演習レポート問題3（2011年7月11日）略解

担当：境 圭一

1. (1) $\boldsymbol{\varphi} = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}) = (u^1, u^2, 0)$ を M の（局所）パラメータ付けとすれば，$\boldsymbol{\varphi}_1 = (1,0,0)$, $\boldsymbol{\varphi}_2 = (0,1,0)$. T_pM はこれらを基底とする2次元ベクトル空間であり，xy 平面 $\{(x,y,z) \,|\, z=0\}$ （M そのもの）である．

   (2) $\boldsymbol{\gamma}(t) = (\gamma^1(t), \gamma^2(t), 0)$ とおける．加速度ベクトル $\boldsymbol{\gamma}''(t) = ((\gamma^1)''(t), (\gamma^2)''(t), 0)$ は接平面（xy 平面）方向に入るから，法線方向は $\mathbf{0}$ なので $\kappa_n \equiv 0$. また

$$\boldsymbol{\gamma}'' = \kappa_g \mathbf{S}$$

   となる．つまり $\kappa_g = \pm|\boldsymbol{\gamma}''|$（以前はこれを κ と書いた）．

   (3) (2) より，$\boldsymbol{\gamma}$ が測地線 $\Leftrightarrow \kappa_g \equiv 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\gamma}'' \equiv \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{\gamma}$ は直線.

2. 速度ベクトル $\mathbf{T}$, $\boldsymbol{\gamma}(t)$ における法ベクトル $\mathbf{n}$ とも xz 平面に入ることが（絵を描くと）わかるから，内在的法ベクトル $\mathbf{S}$ は xz 平面に垂直となる．加速度ベクトル $\boldsymbol{\gamma}''$ も xz 平面に入るから，測地的曲率 $\kappa_g = \langle \boldsymbol{\gamma}'', \mathbf{S} \rangle = 0$, つまり $\boldsymbol{\gamma}$ は測地線である．
具体的に計算すると以下の通り．以降 $\mathbb{R}^3$ の座標は通常の xyz 座標で表す．各 $t_0 \in \mathbb{R}$ に対し，$\boldsymbol{\gamma}(t_0) \in T$ のまわりの局所パラメータ付けを次のように取る（注意2参照）：

$$U := \{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (u^1 - t_0)^2 + (u^2)^2 < \varepsilon^2\} \xrightarrow{\boldsymbol{\varphi}} T,$$
$$\boldsymbol{\varphi}(u^1, u^2) := ((2 + \cos u^1)\cos u^2,\ (2 + \cos u^1)\sin u^2,\ \sin u^1)$$

ただし $\varepsilon > 0$ は十分小さいとする．$\boldsymbol{\alpha}(t) := (t, 0) \in U$ とおけば，$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\varphi} \circ \boldsymbol{\alpha}$.

$$\boldsymbol{\varphi}_1 = (-\sin u^1 \cos u^2,\ -\sin u^1 \sin u^2,\ \cos u^1),$$
$$\boldsymbol{\varphi}_2 = (-(2 + \cos u^1)\sin u^2,\ (2 + \cos u^1)\cos u^2,\ 0).$$

$\mathbf{n} = \dfrac{\boldsymbol{\varphi}_1 \times \boldsymbol{\varphi}_2}{|\boldsymbol{\varphi}_1 \times \boldsymbol{\varphi}_2|}$ を一般的に計算するのは大変だが

$$\boldsymbol{\varphi}_1(\boldsymbol{\alpha}(t)) = (-\sin t,\ 0,\ \cos t), \quad \boldsymbol{\varphi}_2(\boldsymbol{\alpha}(t)) = (0,\ 2 + \cos t,\ 0),$$
$$\boldsymbol{\varphi}_1(\boldsymbol{\alpha}(t)) \times \boldsymbol{\varphi}_2(\boldsymbol{\alpha}(t)) = (-(2 + \cos t)\cos t,\ 0,\ -(2 + \cos t)\sin t)$$

より，$\mathbf{n}(\boldsymbol{\alpha}(t)) = (-\cos t, 0, -\sin t)$. これと $\mathbf{T} = \boldsymbol{\gamma}' = (-\sin t, 0, \cos t)$ より

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{n}(\boldsymbol{\alpha}(t)) = (0, 1, 0).$$

$\boldsymbol{\gamma}''(t) = -(\cos t, 0, \sin t)$ だから，$\kappa_g = \langle \boldsymbol{\gamma}'', \mathbf{S} \rangle = 0$.

3. 記号は7/11の演習の1. に従う．$\boldsymbol{\varphi}_1 = (1, 0, 2u^1)$, $\boldsymbol{\varphi}_2 = (0, 1, 2u^2)$ だから

$$\boldsymbol{\varphi}_1 \times \boldsymbol{\varphi}_2 = (-2u^1, -2u^2, 1), \quad |\boldsymbol{\varphi}_1 \times \boldsymbol{\varphi}_2| = \sqrt{1 + 4(u^1)^2 + 4(u^2)^2}.$$

$\boldsymbol{\varphi}$ に関する第一基本形式を g_{ij} とし，$G=(g_{ij})$ とすると $\det G = |\boldsymbol{\varphi}_1 \times \boldsymbol{\varphi}_2|^2$ だったから，$\boldsymbol{\varphi}(U_a)$ の面積は

$$\begin{aligned}\mathrm{Area}(\boldsymbol{\varphi}(U_a)) &= \int_{U_a} \sqrt{1+4(u^1)^2+4(u^2)^2}\, du^1 du^2 \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{a} \sqrt{1+4r^2}\, r dr d\theta. \qquad\qquad (u^1 = r\cos\theta,\ u^2 = r\sin\theta)\end{aligned}$$

ここで $r\sqrt{1+4r^2} = ((1+4r^2)^{3/2})' \cdot \dfrac{1}{12}$ に注意すると

$$\begin{aligned}\mathrm{Area}(\boldsymbol{\varphi}(U_a)) &= 2\pi \int_0^a \frac{((1+4r^2)^{3/2})'}{12} dr = \frac{\pi}{6}\left[(1+4r^2)^{3/2}\right]_0^a \\ &= \frac{\pi}{6}\left\{(1+4a^2)^{3/2}-1\right\}.\end{aligned}$$

次に

$$\mathbf{n} = \frac{\boldsymbol{\varphi}_1 \times \boldsymbol{\varphi}_2}{|\boldsymbol{\varphi}_1 \times \boldsymbol{\varphi}_2|} = \frac{(-2u^1, -2u^2, 1)}{\sqrt{1+4(u^1)^2+4(u^2)^2}}$$

より，$\mathbf{n}_i$ $(i=1,2)$ を計算すると

$$\mathbf{n}_1 = \frac{-2(1+4(u^2)^2,\, -4u^1u^2,\, 2u^1)}{(1+4(u^1)^2+4(u^2)^2)^{3/2}}, \quad \mathbf{n}_2 = \frac{-2(-4u^1u^2,\, 1+4(u^1)^2,\, 2u^2)}{(1+4(u^1)^2+4(u^2)^2)^{3/2}},$$
$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \frac{(-8u^1, -8u^2, 4)}{\{1+4(u^1)^2+4(u^2)^2\}^2}$$

がわかる．よって

$$\det\begin{pmatrix}\mathbf{n} & \mathbf{n}_1 & \mathbf{n}_2\end{pmatrix} = \langle \mathbf{n}, \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2\rangle = \frac{4}{\sqrt{\{1+4(u^1)^2+4(u^2)^2\}^3}}$$

となる（これは正の値を取るから，$K(p)>0$ がわかる）．$\mathbf{n}(U_a)$ の符号つき面積は

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{Area}}(\mathbf{n}(U_a)) &= \int_{U_a} \frac{4du^1du^2}{\sqrt{\{1+4(u^1)^2+4(u^2)^2\}^3}} = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{a} \frac{4rdrd\theta}{\sqrt{(1+4r^2)^3}} \\ &= 2\pi\int_0^a \left(\frac{-1}{\sqrt{1+4r^2}}\right)' dr = 2\pi\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+4a^2}}\right).\end{aligned}$$

$b := \sqrt{1+4a^2}$ とおくと

$$\frac{\overline{\mathrm{Area}}(\mathbf{n}(U_a))}{\mathrm{Area}(\boldsymbol{\varphi}(U_a))} = \frac{2\pi(b-1)}{b}\cdot\frac{6}{\pi(b^3-1)} = \frac{12}{b(b^2+b+1)}.$$

$a \to 0$ における極限が $K(p)$ である．このとき $b \to 1$ だから，$K(p) = 4$.

注意 1. 1. (2) で，κ_g の符号は定まりません．局所パラメータ付けの取り方次第で，κ_g や κ_n の符号は変化します．ただし $|\kappa_g|$ や $|\kappa_n|$ は局所パラメータ付けに関係なく定まります．

講義でやった手順に従うと，$\kappa_g = \pm\{(\gamma^1)'(\gamma^2)'' - (\gamma^2)'(\gamma^1)''\}$ となります．これも正解です（実際，$|\boldsymbol{\gamma}'| \equiv 1$ を使うと，$|\boldsymbol{\gamma}''|$ に等しいことが示されます）．

注意 2. 2. の $\boldsymbol{\varphi}$ が T への写像になっていることは次のようにわかります．通常の xyz 座標で $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}) = (x(\mathbf{u}), y(\mathbf{u}), z(\mathbf{u}))$ とおくと

$$x^2 + y^2 = (2 + \cos u^1)^2,$$

つまり円柱座標にすると $r - 2 = \cos u^1$ となるので

$$(r-2)^2 + z^2 = 1$$

となり，$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}) \in T$ がわかります．

注意 3. 講義で解説すべきでしたが，**曲率の計算は必ず xyz 座標で行ってください**．例えば，問題 2. のトーラスで Gauss 曲率を計算するとします．円柱座標で書くと

$$T = \{(r, \theta, z) \,|\, (r-2)^2 + z^2 = 1\}$$

のように表されますが，これは $r\theta z$ 空間においては円柱ですから，7/11 の演習でやったように，Gauss 曲率は 0 になります．しかし xyz 座標ではもちろん T は「曲がっている」ので，Gauss 曲率は 0 ではありません．このように，**曲率は，座標に依存します**．言い換えると，座標変換は，曲面の曲がり方を変えます．

注意 4. 対照的な事実として，レポート問題（第 2 回）で,（円柱座標を使って）次のことを確認してもらいました：

$p \in \mathbb{R}^3$ が関数 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ の臨界点か否かは，座標の取り方に依存しない

上記の曲率のことと混同しないようにしてください．

その他

- 複雑な計算を要する問題もありますが，幾何学的な意味を考えることにより計算を省略できる場合があることに注意してほしいと思います．
- 写した人は，やらないよりはずっとよいと思いますが，写すにしても，よく考えながら写すこと．深く考えず写していることは一目瞭然です．