2011 年度 幾何学 中間試験（2011 年 5 月 30 日 13:05〜14:30）

担当：境 圭一

以下，$\mathbf{u}, \mathbf{v}$ などは $\mathbb{R}^3$ の（縦）ベクトル，$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ などは通常の内積，$\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ はベクトル積とする．また，$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする．答案用紙（2 枚，両面）の指定の箇所に解答してください．

1. (1) $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = \langle \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \in \mathbb{R}$ とおく．P を 3×3 行列 $\begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{pmatrix}$ とするとき，次を示せ：

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = \det P$$

   (2) $\mathbf{u}$ と $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ は直交することを示せ．

   (3) 6 つのベクトル $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ に対し，3×3 行列 $A = (a_{ij})$ を $a_{ij} = \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j \rangle$ で定義するとき，次を示せ：

$$\det A = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3][\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$$

2. 次の曲線 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}$ について， 速度ベクトル場 $\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\beta}', \boldsymbol{\gamma}', \boldsymbol{\delta}'$ および曲線の長さを計算せよ．ただし $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ は定数ベクトルとする．

   (1) $\boldsymbol{\alpha}(t) = t\mathbf{u} + \mathbf{v} \quad (0 \le t \le 1)$　　(2) $\boldsymbol{\beta}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ 1 - \sin t \\ -2t \end{pmatrix} \quad (0 \le t \le 2\pi)$

   (3) $\boldsymbol{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t^3/3 \\ t^2/\sqrt{2} \\ t \end{pmatrix} \quad (0 \le t \le 1)$　　(4) $\boldsymbol{\delta}(t) = \begin{pmatrix} \log t \\ \sqrt{2}\,t \\ t^2/2 \end{pmatrix} \quad (1 \le t \le 2)$

3. $|\boldsymbol{\alpha}'| \equiv 1, \kappa \equiv 2, \tau \equiv 0$ であるような曲線 $\boldsymbol{\alpha}$ を求めたい．

   (1) まず $\boldsymbol{\alpha}$ が存在すると仮定する，Frenet-Serret の定理 $\mathbf{T}' = \kappa\mathbf{N}, \mathbf{N}' = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}, \mathbf{B}' = -\tau\mathbf{N}$ を用いて，$\mathbf{T}''(t) = -4\mathbf{T}(t)$ を示せ．

   (2) 定数ベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ に対し，$\mathbf{T}(t) = (\cos 2t)\mathbf{u} + (\sin 2t)\mathbf{v}$ は (1) をみたすことを示せ．

   (3) $\boldsymbol{\alpha}(0) = \mathbf{0}, \mathbf{T}(0) = \mathbf{e}_2, \mathbf{N}(0) = \mathbf{e}_3, \mathbf{B}(0) = \mathbf{e}_1$ のとき，$\boldsymbol{\alpha}(t) = \displaystyle\int_0^t \mathbf{T}(u)\,du + \boldsymbol{\alpha}(0)$ を求めよ．

   (4) (3) の $\boldsymbol{\alpha}$ が実際に $\kappa_\alpha \equiv 2, \tau_\alpha \equiv 0$ をみたすことを確かめよ．

4. (1) $\boldsymbol{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}(t) = \boldsymbol{\alpha}(t) - \boldsymbol{\alpha}'(t)$ とおく．$\boldsymbol{\alpha}'(t), \boldsymbol{\beta}(t)$ を求め，$\langle \boldsymbol{\alpha}(t), \boldsymbol{\beta}(t) \rangle$ を計算せよ．

   (2) $|\boldsymbol{\alpha}'(t)|$ を計算せよ．

   (3) $\boldsymbol{\alpha}(t)$ と $\boldsymbol{\alpha}'(t)$ のなす角を求めよ．

   (4) 長さ関数 $l(t) = \displaystyle\int_0^t |\boldsymbol{\alpha}'(s)|\,ds$ を求めよ．

   (5) $\boldsymbol{\gamma}(s) = \boldsymbol{\alpha}(g(s))$ とおくとき $|\boldsymbol{\gamma}'| \equiv 1$ となるようなパラメータ変換 g を求めよ．

試験終了後の 4 限に，簡単な解説を行います．

配点：20, 30, 25, 25 $(7+7+6=20,\ 7+7+8+8=30,\ 7+4+7+7=25,\ 5\times 5=25)$