2011 年度 幾何学 中間試験（2011 年 5 月 30 日）略解

担当：境 圭一

1. (1) 座標を使って $\mathbf{u} = u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2 + u^3\mathbf{e}_3$ などと書くと

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} u^2 & v^2 \\ u^3 & v^3 \end{vmatrix}\mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} u^1 & v^1 \\ u^3 & v^3 \end{vmatrix}\mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} u^1 & v^1 \\ u^2 & v^2 \end{vmatrix}\mathbf{e}_3$$

だった．$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ は正規直交基底だから

$$\langle \mathbf{u}\times\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \begin{vmatrix} u^2 & v^2 \\ u^3 & v^3 \end{vmatrix} w^1 - \begin{vmatrix} u^1 & v^1 \\ u^3 & v^3 \end{vmatrix} w^2 + \begin{vmatrix} u^1 & v^1 \\ u^2 & v^2 \end{vmatrix} w^3$$

である．これは $\det P$ を第 3 列について余因子展開したものに等しい．

(2) (1) より

$$\langle \mathbf{u}\times\mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle = \begin{vmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{u} \end{vmatrix}$$

であるが，第 1 列と第 3 列が共通だから，この行列式は 0.

(3) $\mathbf{u}_1 = u_1^1\mathbf{e}_1 + u_1^2\mathbf{e}_2 + u_1^3\mathbf{e}_3$ などと座標で書くと

$$a_{ij} = \sum_{k=1,2,3} u_i^k v_j^k.$$

一方，$U = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{pmatrix}$ とおくと，(1) より

$$[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3][\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3] = \det U \det V = \det({}^tUV)$$

である（転置行列 ${}^tU$ を考えても行列式は変わらない）．${}^tUV$ の (ij) 成分 b_{ij} は

$$b_{ij} = \sum_{k=1,2,3} u_i^k v_j^k = a_{ij}.$$

よって $A = {}^tUV$ だから，$\det A = \det({}^tUV) = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3][\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$.

2. $\boldsymbol{\alpha}'(t) = \mathbf{u}$, $\boldsymbol{\beta}'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \\ -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\gamma}'(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ \sqrt{2}\,t \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\delta}'(t) = \begin{pmatrix} 1/t \\ \sqrt{2} \\ t \end{pmatrix}$. $|\boldsymbol{\alpha}'(t)| = |\mathbf{u}|$, $|\boldsymbol{\beta}'(t)| = \sqrt{5}$, $|\boldsymbol{\gamma}'(t)| = t^2+1$, $|\boldsymbol{\delta}'(t)| = t + \dfrac{1}{t}$ $(1 \le t \le 2)$ だから，長さはそれぞれ

$$l_\alpha = \int_0^1 |\mathbf{u}|\,dt = |\mathbf{u}|, \quad l_\beta = \int_0^{2\pi} \sqrt{5}\,dt = 2\sqrt{5}\,\pi,$$
$$l_\gamma = \int_0^1 (t^2+1)\,dt = \left[\frac{t^3}{3} + t\right]_0^1 = \frac{4}{3},$$
$$l_\delta = \int_1^2 \left(t + \frac{1}{t}\right) dt = \left[\frac{t^2}{2} + \log t\right]_1^2 = \frac{3}{2} + \log 2.$$

3. (1) $\mathbf{T}''(t) = (\kappa\mathbf{N}(t))' = 2\mathbf{N}'(t) = 2(-\kappa\mathbf{T}(t) + \tau\mathbf{B}(t)) = -4\mathbf{T}(t)$.

(2) 略.

(3) まず $\mathbf{e}_2 = \mathbf{T}(0) = \mathbf{u}$. よって $\mathbf{T}'(t) = (-2\sin 2t)\mathbf{e}_2 + (2\cos 2t)\mathbf{v}$ だから，特に $\mathbf{T}'(0) = 2\mathbf{v}$. よって $\mathbf{e}_3 = \mathbf{N}(0) = \dfrac{\mathbf{T}'(0)}{\kappa} = \dfrac{2\mathbf{v}}{2} = \mathbf{v}$. 従って $\mathbf{T}(t) = (\cos 2t)\mathbf{e}_2 + (\sin 2t)\mathbf{e}_3$ となる．$\boldsymbol{\alpha}(0) = \mathbf{0}$ より $\boldsymbol{\alpha}(t) = \displaystyle\int_0^t \mathbf{T}(u)\,du = \frac{\sin 2t}{2}\mathbf{e}_2 + \frac{1-\cos 2t}{2}\mathbf{e}_3$.

(4) (3) の形から，$\boldsymbol{\alpha}$ は yz 平面内で $(0, 1/2)$ を中心とする半径 $r = 1/2$ の円を描き，しかも $|\boldsymbol{\alpha}'| \equiv 1$ であるから，曲率は一定で $\kappa_\alpha \equiv 1/r = 2$. また $\boldsymbol{\alpha}$ は yz 平面に入っている平面曲線だから $\tau_\alpha \equiv 0$. （もちろん直接計算してもよい）

4. (1) $\boldsymbol{\alpha}'(t) = \begin{pmatrix} e^t(\cos t - \sin t) \\ e^t(\sin t + \cos t) \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}(t) = \begin{pmatrix} e^t \sin t \\ -e^t \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$, $\langle \boldsymbol{\alpha}(t), \boldsymbol{\beta}(t) \rangle = 0$.

(2) $\langle \boldsymbol{\alpha}(t), \boldsymbol{\beta}(t) \rangle = 0$ を使うと

$$|\boldsymbol{\alpha}'(t)|^2 = \langle \boldsymbol{\alpha}(t) - \boldsymbol{\beta}(t), \boldsymbol{\alpha}(t) - \boldsymbol{\beta}(t) \rangle = |\boldsymbol{\alpha}(t)|^2 + |\boldsymbol{\beta}(t)|^2 = e^{2t} + e^{2t},$$

よって $|\boldsymbol{\alpha}'(t)| = \sqrt{2}\,e^t$. （もちろん直接計算してもよい）

(3) $\boldsymbol{\alpha}(t)$ と $\boldsymbol{\alpha}'(t)$ のなす角を θ とすると

$$\langle \boldsymbol{\alpha}(t), \boldsymbol{\alpha}'(t) \rangle = |\boldsymbol{\alpha}(t)||\boldsymbol{\alpha}'(t)| \cos\theta = e^t \cdot \sqrt{2}\,e^t \cos\theta = \sqrt{2}\,e^{2t}\cos\theta.$$

一方

$$\langle \boldsymbol{\alpha}(t), \boldsymbol{\alpha}'(t) \rangle = \langle \boldsymbol{\alpha}(t), \boldsymbol{\alpha}(t) - \boldsymbol{\beta}(t) \rangle = |\boldsymbol{\alpha}(t)|^2 = e^{2t}$$

（ここで $\langle \boldsymbol{\alpha}(t), \boldsymbol{\beta}(t) \rangle = 0$ を使った）．よって

$$\sqrt{2}\,e^{2t}\cos\theta = e^{2t}, \quad \text{つまり} \quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

を得る．従って $\theta = \pi/4$.

(4) $l(t) = \sqrt{2}\displaystyle\int_0^t e^s ds = \sqrt{2}\,(e^t - 1)$.

(5) $s = l(t)$ の逆関数 $t = g(s)$ が求めるパラメータ変換．$s = l(t) \Leftrightarrow t = g(s)$ だから，$s = l(t) = \sqrt{2}\,(e^t - 1)$ を t について解き，$t = g(s) = \log\left(1 + \dfrac{s}{\sqrt{2}}\right)$.

配点：20, 30, 25, 25 $(7+7+6=20,\ 7+7+8+8=30,\ 7+4+7+7=25,\ 5\times 5=25)$
http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/11_geometry/11_geometry.html