2011 年度 幾何学 期末試験（2011 年 7 月 25 日 13:05〜14:30）

担当：境 圭一

断らない限り，φ は（考えている点のまわりの）局所パラメータ付けを表すとする．これらの写像について，第 i 成分による偏微分を φ_i などと書く．また，$(a,b) \in \mathbb{R}^2$ の十分小さい近傍を $U_\epsilon(a,b)$ と書く：

$$U_\epsilon(a,b) := \{(u^1,u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid (u^1-a)^2 + (u^2-b)^2 < \epsilon^2\}$$

途中計算を全て詳しく書く必要はありません．要点をまとめて記述してください．
答案用紙（2 枚，両面）の指定の箇所に解答してください．計算用紙は提出不要です．

1. (1) 次の集合 $M_i \subset \mathbb{R}^3$ $(i=1,2,3)$ は滑らかな曲面か．理由と共に答えよ．
   - (i) $M_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2\}$
   - (ii) $M_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{x^2+y^2}\}$
   - (iii) $M_3 = f^{-1}(a)$, ただし $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$, また $a \in \mathbb{R}$

   (2) 次の滑らかな曲面 M_i $(i=4,5)$ と $p_i \in M_i$ に対し，p_i において M_i に接する平面を求めよ．
   - (i) $M_4 = f^{-1}(0)$, ただし $f(x,y,z) := x^2+z^2-1$, $p_4 = (1,3,0)$
   - (ii) $M_5 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \cos x \sin y\}$, $p_5 = \left(0, \frac{\pi}{2}, 1\right)$

2. (1) $x > 0$ で定義された C^∞ 級関数 $z = f(x)$ を考える．xz 平面内に描かれた f のグラフを z 軸のまわりに一回転させて得られる図形を M とする．M は滑らかな曲面であることを示せ．

   (2) $a > 0$ を定数とする．M 上の曲線 $\boldsymbol{\gamma}(t) := \left(a\cos\frac{t}{a},\, a\sin\frac{t}{a},\, f(a)\right)$ の測地的曲率，法曲率の絶対値 $|\kappa_g|$, $|\kappa_n|$ を求めよ．

   (3) $\boldsymbol{\gamma}$ が測地線になることはあるか．あればそのときの a の条件を求め，なければ理由を述べよ．

3. 球面 $S^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$ を考える．

   (1) $\mathbf{u} = (p,q,r) \in S^2$ において S^2 に接する平面および単位法ベクトルを求めよ．

   (2) $\boldsymbol{\gamma}$ を S^2 上の曲線で $|\boldsymbol{\gamma}'| \equiv 1$ であるものとする．$\boldsymbol{\gamma}$ の法曲率の絶対値 $|\kappa_n|$ を求めよ．

   (3) (2) の $\boldsymbol{\gamma}$ が測地線であるための必要十分条件は $|\boldsymbol{\gamma}''| \equiv 1$ であることを示せ．

   (4) $a > 0$ を定数とする．S^2 上の曲線 $\boldsymbol{\gamma}(t) = \left(a\cos\frac{t}{a},\, a\sin\frac{t}{a},\, \sqrt{1-a^2}\right)$ が測地線になることはあるか．あればそのときの a の条件を求め，なければ理由を述べよ．

4. (1) 曲面 $M \subset \mathbb{R}^3$ 上の点 p のまわりのパラメータ付けとして，$\boldsymbol{\varphi} : U_\epsilon(0,0) \to M$ で $\boldsymbol{\varphi}(0,0) = p$ となるものが取れているとする．また $\mathbf{u} \in U_\epsilon(0,0)$ に対し，$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u})$ における単位法ベクトルを

$$\mathbf{n}(\mathbf{u}) := \frac{\boldsymbol{\varphi}_1(\mathbf{u}) \times \boldsymbol{\varphi}_2(\mathbf{u})}{|\boldsymbol{\varphi}_1(\mathbf{u}) \times \boldsymbol{\varphi}_2(\mathbf{u})|}$$

   で定義する．$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = k\boldsymbol{\varphi}_1 \times \boldsymbol{\varphi}_2$ となる C^∞ 級関数 $k : U_\epsilon(0,0) \to \mathbb{R}$ が存在することを示せ．

   (2) (1) の k は C^∞ 級なので，$k(\mathbf{u}) = k(0,0) + \sum_{i=1,2} u^i l_i(\mathbf{u})$ となる有界な関数 $l_1, l_2 : U_\epsilon(0,0) \to \mathbb{R}$ が存在する．このことを使い，p における Gauss 曲率は $K(p) = k(0,0)$ をみたすことを示せ．

   (3) 曲面 $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = xy\}$ 上の点 $p = (0,0,0)$ における Gauss 曲率 $K(p)$ を求めよ．

試験終了後の 4 限に，簡単な解説を行います（第 8 講義室）．出席は取りません．

配点：30, 25, 25, 20 $(6 \times 5 = 30,\ 8+12+5 = 25,\ 7+7+7+4 = 25,\ 5+10+5 = 20)$