2011 年度 幾何学 期末試験 略解

担当：境 圭一

1. (1) (i) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) := x^2+y^2-z$ は C^∞ 級関数で $M_1 = f^{-1}(0)$. $f_3 = -1$ より，$f_1 = f_2 = f_3 = 0$ となる点（臨界点）は存在しないから，$0 \in \mathbb{R}$ は正則値である．よって $M_1 = f^{-1}(0)$ は滑らかな曲面である．

   (ii) $(0,0,0) \in M_2$ の近傍は，$\mathbb{R}^2$ の開集合と滑らかに同相になり得ないので，M_2 は滑らかな曲面ではない．

   (iii) $f_1 = 2x$, $f_2 = 2y$, $f_3 = -2z$ より，f の臨界点は $(0,0,0)$. よって $f(0,0,0) = 0$ は臨界値，それ以外は正則値である．従って $a \neq 0$ のとき $M_3 = f^{-1}(a)$ は滑らかな曲面である．$a = 0$ のときは滑らかな曲面ではない（実際，$(0,0,0)$ の近傍は $\mathbb{R}^2$ の開集合と滑らかに同相になり得ない）．

   (2) (i) 円柱の絵を描けば $\{x = 1\}$ であることはすぐにわかる．以下のように計算してもよい．p_4 のまわりで $\boldsymbol{\varphi}(u^1,u^2) := (\sqrt{1-(u^2)^2}, u^1+3, u^2)$ を考えると，$\boldsymbol{\varphi}(0,0) = p_4$ である．$\boldsymbol{\varphi}_1(0,0) = (0,1,0)$, $\boldsymbol{\varphi}_2(0,0) = (0,0,1)$ であるから，求める平面は，p_4 を通り yz 平面に平行な平面，つまり $x = 1$ である．

   (ii) 正弦曲線の極大点における接平面だから，xy 平面に平行な $\{z = 1\}$ になる．以下のように計算してもよい．p_5 のまわりで $\boldsymbol{\varphi}(u^1,u^2) = (u^1, u^2, \cos u^1 \sin u^2)$ を考えると，$\boldsymbol{\varphi}(0,\pi/2) = p_5$ である．$\boldsymbol{\varphi}_1(0,\pi/2) = (1,0,0)$, $\boldsymbol{\varphi}_2(0,\pi/2) = (0,1,0)$ であるから，求める平面は p_5 を通り xy 平面に平行，つまり $z = 1$.

2. (1) 円柱座標で $F(r,\theta,z) := z - f(r)$ とおく．F は $r \neq 0$ のとき定義され C^∞ 級．$M = F^{-1}(0)$ 上では $r \neq 0$ である．$F_z = 1$ だから，F は臨界点を持たず，従って $0 \in \mathbb{R}$ は F の正則値．よって M は滑らかな曲面である．

   (2) $\boldsymbol{\gamma}(t_0)$ のまわりで $\boldsymbol{\varphi} : U_\epsilon(t_0/a,\, a) \to M$, $\boldsymbol{\varphi}(u^1,u^2) := (u^2\cos u^1, u^2 \sin u^1, f(u^2))$ を考える．$\boldsymbol{\alpha}(t) := (t/a, a) \in U_\epsilon(t/a,\, a)$ とすると $\boldsymbol{\varphi} \circ \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\gamma}$. 計算すると

$$\mathbf{n}(\mathbf{u}) = \frac{(f'(u^2)\cos u^1,\ f'(u^2)\sin u^1,\ -1)}{\sqrt{1+f'(u^2)^2}}, \quad \mathbf{S}(t) = \frac{-\bigl(\cos\dfrac{t}{a},\ \sin\dfrac{t}{a},\ f'(a)\bigr)}{\sqrt{1+f'(a)^2}}$$

   がわかるから

$$|\kappa_g| = |\langle \boldsymbol{\gamma}'', \mathbf{S}\rangle| = \frac{1}{a\sqrt{1+f'(a)^2}}, \quad |\kappa_n| = |\langle \boldsymbol{\gamma}'', \mathbf{n}\circ\boldsymbol{\alpha}\rangle| = \frac{|f'(a)|}{a\sqrt{1+f'(a)^2}}.$$

   (3) (2) より，κ_g は決して 0 にならないから，$\boldsymbol{\gamma}$ は測地線にならない．

3. (1) S^2 の場合，求める平面は $\mathbf{u}$ を通り $\mathbf{u}$ に直交する平面だから $p(x-p)+q(y-q)+r(z-r) = 0$. 単位法ベクトル $\mathbf{n} = \mathbf{u}$（または $-\mathbf{u}$ でもよい）．

   (2) $\boldsymbol{\gamma}(t) \in S^2$ における単位法ベクトルは $\boldsymbol{\gamma}(t)$ だから，$|\kappa_n| = |\langle \boldsymbol{\gamma}'', \boldsymbol{\gamma}\rangle|$. $|\boldsymbol{\gamma}| \equiv 1$ より $0 = \langle \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}\rangle' = 2\langle \boldsymbol{\gamma}', \boldsymbol{\gamma}\rangle$ だから $\langle \boldsymbol{\gamma}', \boldsymbol{\gamma}\rangle = 0$. よって $0 = \langle \boldsymbol{\gamma}', \boldsymbol{\gamma}\rangle' = \langle \boldsymbol{\gamma}'', \boldsymbol{\gamma}\rangle + \langle \boldsymbol{\gamma}', \boldsymbol{\gamma}'\rangle$, つまり $|\kappa_n| = |\boldsymbol{\gamma}'|^2 = 1$.

(3) (2) より $|\boldsymbol{\gamma}''|^2 = \kappa^2 = \kappa_g^2 + \kappa_n^2 = \kappa_g^2 + 1$ となるから，$\boldsymbol{\gamma}$ が測地線 $\Leftrightarrow \kappa_g = 0 \Leftrightarrow |\boldsymbol{\gamma}''| = 1$.

(4) $\boldsymbol{\gamma}''(t) = -\dfrac{1}{a}\Big(\cos\dfrac{t}{a}, \sin\dfrac{t}{a}, 0\Big)$ と $a > 0$ より $|\boldsymbol{\gamma}''| = \dfrac{1}{a}$. (3) より，$\boldsymbol{\gamma}$ が測地線 $\Leftrightarrow a = 1$.

4. (1) $\mathbf{n}_1(\mathbf{u}), \mathbf{n}_2(\mathbf{u}) \in T_{\mathbf{n}(\mathbf{u})}S^2$ より $\mathbf{n} \perp \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$. よって $\tilde{k}\mathbf{n} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ となる関数 $\tilde{k}$ が存在する．$\tilde{k} = \pm|\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2|$ となるから，$\tilde{k}$ は C^∞ 級．$\mathbf{n} = \boldsymbol{\varphi}_1 \times \boldsymbol{\varphi}_2 / |\boldsymbol{\varphi}_1 \times \boldsymbol{\varphi}_2|$ より，$k = \tilde{k}/|\boldsymbol{\varphi}_1 \times \boldsymbol{\varphi}_2|$ が求める関数である．$\tilde{k}$ が C^∞ 級だから k も C^∞級.

(2) $U_\epsilon := U_\epsilon(0,0)$, $d\mathbf{u} := du^1du^2$ と略記する．$K(p)$ の正負に応じて符号 $\pm$ を決めて

$$\Phi(\epsilon) := \pm\int_{U_\epsilon} |\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2|\, d\mathbf{u} \Big/ \int_{U_\epsilon} |\boldsymbol{\varphi}_1 \times \boldsymbol{\varphi}_2|\, d\mathbf{u}$$

とおくと $K(p) = \lim_{\epsilon\to 0}\Phi(\epsilon)$. $k(\mathbf{u}) = k(0,0) + \sum_{i=1,2} u^i l_i(\mathbf{u})$ および三角不等式から

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{U_\epsilon} |k\boldsymbol{\varphi}_1 \times \boldsymbol{\varphi}_2|\, d\mathbf{u} - \int_{U_\epsilon} |k(0,0)\boldsymbol{\varphi}_1 \times \boldsymbol{\varphi}_2|\, d\mathbf{u}\right| \\
&\le \int_{U_\epsilon} \big||k\boldsymbol{\varphi}_1 \times \boldsymbol{\varphi}_2| - |k(0,0)\boldsymbol{\varphi}_1 \times \boldsymbol{\varphi}_2|\big| d\mathbf{u} \\
&\le \int_{U_\epsilon} |(k - k(0,0))\boldsymbol{\varphi}_1 \times \boldsymbol{\varphi}_2|\, d\mathbf{u} \le \sum_{i=1,2}\int_{U_\epsilon} \left|u^i l_i \boldsymbol{\varphi}_1 \times \boldsymbol{\varphi}_2\right| d\mathbf{u}
\end{aligned} \tag{1}$$

であるが，U_ϵ において l_i は有界だから，$|l_1|, |l_2| < c$ であるとすれば

$$0 \le \int_{U_\epsilon} \left|u^i l_i \boldsymbol{\varphi}_1 \times \boldsymbol{\varphi}_2\right| d\mathbf{u} < \epsilon c \int_{U_\epsilon} |\boldsymbol{\varphi}_1 \times \boldsymbol{\varphi}_2|\, d\mathbf{u}$$

だから，不等式 (1) より

$$\left|\int_{U_\epsilon} |k\boldsymbol{\varphi}_1 \times \boldsymbol{\varphi}_2|\, d\mathbf{u} - \int_{U_\epsilon} |k(0,0)\boldsymbol{\varphi}_1 \times \boldsymbol{\varphi}_2|\, d\mathbf{u}\right| < 2\epsilon c \int_{U_\epsilon} |\boldsymbol{\varphi}_1 \times \boldsymbol{\varphi}_2|\, d\mathbf{u}.$$

両辺を $\int_{U_\epsilon} |\boldsymbol{\varphi}_1 \times \boldsymbol{\varphi}_2|\, d\mathbf{u}$ で割ると，$k\boldsymbol{\varphi}_1 \times \boldsymbol{\varphi}_2 = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ より

$$|\pm|\Phi(\epsilon)| - |k(0,0)|| \le 2\epsilon c,$$

よって $\epsilon \to 0$ において $\Phi \to \pm|k(0,0)|$ がわかる．よって $k(0,0) = \pm K(p)$ であるが，$\tilde{k}\mathbf{n} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ より $\tilde{k}$ と $K(p)$ は同符号で，k と $\tilde{k}$ も同符号だから，$k(0,0) = K(p)$.

(3) p のまわりで $\boldsymbol{\varphi}(u^1, u^2) = (u^1, u^2, u^1u^2)$ を考えると，$\boldsymbol{\varphi}(0,0) = p$ である．$\boldsymbol{\varphi}_1(0,0) = (1,0,0)$, $\boldsymbol{\varphi}_2(0,0) = (0,1,0)$ より $(\boldsymbol{\varphi}_1 \times \boldsymbol{\varphi}_2)(0,0) = (0,0,1)$. また計算すると $\mathbf{n}_1(0,0) = (0,-1,0)$, $\mathbf{n}_2(0,0) = (-1,0,0)$, $(\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2)(0,0) = (0,0,-1)$ となっているから，(1) のような k について $k(0,0) = -1$. よって (2) より $K(p) = -1$.

配点：30, 25, 25, 20 ($6\times 5 = 30$, $8+12+5 = 25$, $7+7+6+5 = 25$, $5+10+5 = 20$)
答案の返却を希望する人は，8/1（月）以降に取りに来てください．