線形代数学 レポート問題 2（2011 年 10 月 27 日）略解

担当：境 圭一

1. 拡大係数行列を基本変形で変形していってもよいし，あるいは (第 1 式) $\times 3 -$ (第 2 式) $\times 2$ を計算すると
$$4x + 3y - 7z = 3$$
となる．この式と第 3 式を辺々加えると
$$0 = a + 3$$
となる．もし $a + 3 \neq 0$ なら，もとの連立方程式は解を持たないことになる．よって，連立方程式が解を持つような a は，あるとすれば $a = -3$ しかありえない．
逆に $a = -3$ とすると，もとの方程式の第 3 式は第 1, 第 2 式から出るので，実質的には
$$(*)\begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$$
を解くことになる．(第 1 式) $\times 2 +$ (第 2 式) から $5x - 5y = 2$, つまり $y = x + \dfrac{2}{5}$, これを第 1 式に代入して変形すれば $z = x - \dfrac{7}{5}$ となるから，$x = t$ とおけば，全ての実数 t に対し
$$x = t, \quad y = t + \frac{2}{5}, \quad z = t - \frac{7}{5}$$
が解になる．つまり元の連立方程式は解を一つ以上持つことになる．以上から $\boldsymbol{a = -3}$ が答．

2. (1) 対称行列であることから ${}^tX = X$, 交代行列であることから ${}^tX = -X$．この 2 式から $X = -X$, つまり $X = O$ である．

   (2) ${}^tB = {}^t\left(\dfrac{A + {}^tA}{2}\right) = \dfrac{{}^tA + {}^t({}^tA)}{2} = \dfrac{{}^tA + A}{2} = B$ だから B は対称行列．

   (3) ${}^tC = {}^t\left(\dfrac{A - {}^tA}{2}\right) = \dfrac{{}^tA - {}^t({}^tA)}{2} = \dfrac{{}^tA - A}{2} = -\dfrac{A - {}^tA}{2} = -C$ だから C は交代行列．

   (4) $B + C = A = B' + C'$ より $B - B' = -C + C'$（$= X$ とおく）．まず B, B' は対称行列だから
$${}^tX = {}^t(B - B') = {}^tB - {}^tB' = B - B' = X$$
なので X は対称行列．一方，C, C' は交代行列だから
$${}^tX = -{}^tC + {}^tC' = C - C' = -X$$
なので X は交代行列でもある．よって (1) より $X = O$ である．つまり $B - B' = O$, $-C + C' = O$ だから $B' = B$, $C' = C$.

コメント.

1. では，上の略解の「逆に」以降が大事です．$a = -3$ 以外に答はあり得ないわけですが，$a = -3$ であっても，連立方程式 $(*)$ が解を持つか否かは，実際やってみないとわかりません．この点にまで触れた答案は残念ながらありませんでした．

2. では，$X = (x_{ij})$ のように成分を使って計算してもよいのですが，上の略解のように，成分を全く使わなくてもできます．多くの場合，成分を使わずにできるのであれば，そのほうが簡単になります．

「講義の最初に提出」となっているので，講義終了後に提出されたものは受け付けていません．今後レポートの提出がある場合，遅刻しないよう気を付けてください．遅刻することがわかっている場合は，努力を無にすることのないよう，何らかの形で間に合わせるようにしてください．誰かに預けたり，あるいは期日より前に直接提出しに来ていただいても構いません（研究室は，理学部 A 棟 403 号室です）．