線形代数学 レポート問題 3（2012 年 1 月 12 日）略解

担当：境 圭一

1. A についてはサラスの方法で計算できる．$|A| = 0$.

   B については，例えば 2 行目から 1 行目を引き，4 行目から 1 行目の 2 倍を引くことで（行列式は変わらない）

$$|B| = \left| \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \right|$$

   がわかる．これを第 2 列に関して展開することで

$$|B| = -\left| \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \right|$$

   がわかる．あとはサラスの方法などで，$|B| = -2$.

   C については，例えば 2, 3 列目から 1 列目を引くことで（行列式は変わらない）

$$|C| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{pmatrix} \right| = (a-b)(b-c)(c-a).$$

2. 正則なのは，行列式が 0 でない B と C（文字は全て異なると仮定した）．B^{-1} は基本変形を使って求められる．C^{-1} は 9 つの余因子を全て計算するほうが簡単かもしれない．

$$B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -23 & 14 & 11 \\ -1 & 53 & -32 & -25 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ -1 & 7 & -4 & -3 \end{pmatrix},$$

$$C^{-1} = \frac{1}{(a-b)(b-c)(c-a)} \begin{pmatrix} -bc(b-c) & (b+c)(b-c) & -(b-c) \\ -ca(c-a) & (c+a)(c-a) & -(c-a) \\ -ab(a-b) & (a+b)(a-b) & -(a-b) \end{pmatrix}$$

コメント．計算方法はおおむね理解されているようですが，計算間違いが多いようです．慎重に計算してください．いくつか気になる間違いがありましたが，例えば行列 A のある行が λ 倍されているとき，その λ を前に出すことはできません．全ての成分が λ 倍されていれば，それを前に出すことはできます：

$$(\lambda a_{ij})_{\substack{1\le i\le m,\\ 1\le j\le n}} = \lambda\,(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m,\\ 1\le j\le n}}$$

基本的な性質をもう一度復習しておいてください．

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/11_linear/11_linear.html