

1. (1) ~ (5) のとおりにすると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 44 & -10 \end{pmatrix}$$

になるので, $\text{rank} A = 3$.

2. 例えば次のように変形される :

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 階数は 2

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 階数は 1

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, 階数は 3

(4) ヒントのとおりになると $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \end{pmatrix}$ となる . 2 行目に 1 行目の $-\sin^2 \theta$ 倍を加えると $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos \theta \sin \theta \end{pmatrix}$ である .

階数は θ によらず 2 である . 実際 , もとの行列の行列式は $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ だから正則で , 命題 2.4 により階数は 2 だとわかる .

注意 . 階段行列に変形した結果をみると , $\cos \theta \sin \theta = 0$ のとき階数は 1 であるようにみえるが , 実はそうではない . 上の変形では行に $\cos \theta$ や $\sin \theta$ をかけており , $\cos \theta \sin \theta = 0$ のとき , これらの変形は行を 0 倍しているから , そもそも基本変形にはなっていないのである .