線形代数学 演習問題 5（2011 年 11 月 24 日）略解

担当：境 圭一

1. $\left(A \,\middle|\, E\right)$ などを，左半分が単位行列になるように基本変形したとき，右半分に残る行列が逆行列である．

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -6 & 16 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. (1) は $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ だから $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \end{pmatrix}$.

   (2) は $B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ だから $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B^{-1}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. A を階段行列にするような基本変形を表す $m \times m$ 正則行列を P とする．つまり，PA は $m \times n$ の階段行列とする．

   (1) $\operatorname{rank} A = n$ なら,（被約）階段行列 PA は次のような形にまで変形できることがわかる：

$$PA = \left(\begin{array}{cccc} * & & & \\ & * & & \\ & & \ddots & \\ & & & * \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right)$$

   「対角成分」はいずれも 0 ではない．もとの方程式の両辺に P を左からかけると

$$PA\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (*)$$

   であるが，この式からただちに $x_1 = \cdots = x_n = 0$ がわかる．

   (2) $\operatorname{rank} A = k$ とおく．$k < n$ なら,

$$PA = \left(\begin{array}{ccccccc} * & * & \dots & * & * & \dots & * \\ & * & \dots & * & * & \dots & * \\ & & \ddots & * & * & \dots & * \\ & & & * & * & \dots & * \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right)$$

   という形で，0 でないかもしれないのは上から k 行目まで．$(*)$ は k 個の方程式からなる連立方程式になるが，k 番目の式は $x_{n-k}, \dots, x_n$ の式．このうち $x_{n-k+1}, \dots, x_n$ を適

当な変数 $t_1, \ldots, t_k$ でおきかえれば，x_{n-k} はこれらの変数で表される．それをひとつ前の式に代入し，... と繰り返せば，解は変数 $t_1, \ldots, t_k$ を使って表される．変数の値は何でもよいので，解は無数に存在し，その中には自明でないものも含まれる．