線形代数学 演習問題6（2011年12月1日）略解

担当：境 圭一

1. A については，行列式 $|A| = k \neq 0$ のとき正則で，逆行列は $A^{-1} = \begin{pmatrix} (\cos\theta)/k & (\sin\theta)/k \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
   B については，(i) 2行目から1行目を引く，(ii) 3行目から2行目を引く，という変形で $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}$ という階段行列になる．B が正則であることと階数が3であることは同値だから，$k \neq -1$ のとき B は正則．このとき，$B^{-1} = \dfrac{1}{k+1}\begin{pmatrix} 2(k-2) & -k+3 & -4 \\ -k & k & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
   C については，すでに階段行列になっており，どの行ベクトルも $\overrightarrow{0}$ でないから階数は3. 従って，どんな k に対しても C は正則であり，逆行列を求めると $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. 省略.

3. 互換の合成 $\tau_{ij}^2 = \tau_{ij}\tau_{ij}$ を考える．これは i, j の入れ替えを二回繰り返す置換だから，結局は何も変えない，つまり恒等置換である：$\tau_{ij}\tau_{ij} = e$（恒等置換）．従って $\tau_{ij}^{-1} = \tau_{ij}$.

4. (1) 例えば図1が答の一つ.
   (2) 例えば $\tau(1) = 3$, $\sigma(3) = 5$ だから $\sigma\tau(1) = \sigma(3) = 5$. 同様に計算していくと，$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
   (3) (1) のアミダくじを上から τ, σ の順に重ねると図2のようになる．上から辿っていくと，確かに (2) で求めた置換に一致している．
   (4) 図1の σ の上下を逆にすると図3のようになる．これと σ に対応するアミダくじを縦につなげてみると，恒等置換に対応することがわかる．つまり図3のアミダくじが σ^{-1} に対応することがわかる．

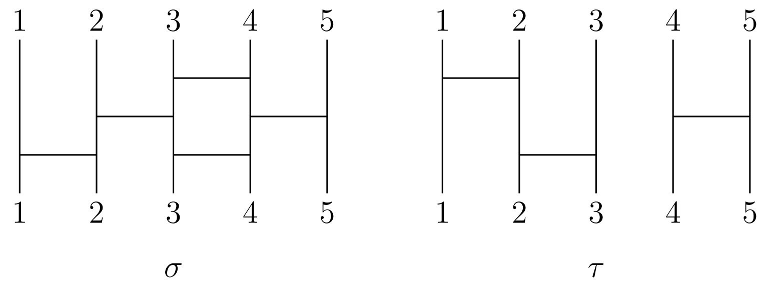

図 1: σ, τ を表すアミダくじ

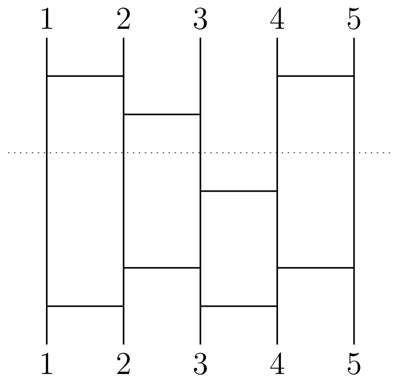

図 2: σ,τ を並べたアミダくじ

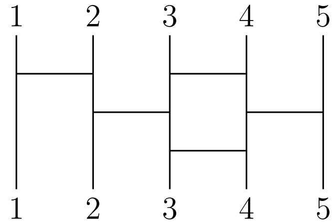

図 3: σ の上下を逆にしたアミダくじ