線形代数学 演習問題 7（2011 年 12 月 15 日）略解

担当：境 圭一

1. (1) $\sigma_1 = \tau_{12}\tau_{23}\tau_{34}$ がわかるから，$\mathrm{sgn}(\sigma_1) = -1$.

   (2) $\sigma_2 = \tau_{23}\sigma_1$ がわかるから，$\mathrm{sgn}\sigma_2 = -\mathrm{sgn}(\sigma_1) = +1$.

   (3) $\sigma_3 = \tau_{23}\tau_{34}\tau_{23}\tau_{12}$ がわかるから，$\mathrm{sgn}(\sigma_3) = +1$.

2. サラスの方法で計算すると，$|A| = 2$, $|B| = -1 - k^2$, $|C| = ad - bc$.

3. (1) サラスの方法で計算すると，対角成分の積 $a_{11}a_{22}a_{33}$ 以外は全て 0 を含むことがわかるから

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33}.$$

   (2) 全ての i について $\sigma(i) \geq i$ だと仮定してみる．すると，特に $\sigma(n) \geq n$ が成り立つが，n 文字の並べ替えだから $\sigma(n) = n$. 次に $\sigma(n-1) \geq n-1$ であるが，写像 $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ が重複のない写像であることに注意すると，$\sigma(n-1) = n-1$ しかあり得ないことがわかる．繰り返すと，全ての i について $\sigma(i) = i$ が成り立ち，σ が恒等置換でないことに矛盾する．

   (3) 行列式の定義は

$$|B| = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) b_{1\,\sigma(1)} b_{2\,\sigma(2)} \ldots b_{n\,\sigma(n)}$$

   だった．(2) から，右辺で σ が恒等置換でない項については，必ず $\sigma(i) < i$ となる i を含む．仮定より，この i については $b_{i\,\sigma(i)} = 0$ であるから，右辺で 0 にならない可能性があるのは σ が恒等置換の項だけである．よって

$$\begin{aligned} |B| &= \mathrm{sgn}(e) b_{1\,e(1)} b_{2\,e(2)} \ldots b_{n\,e(n)} \\ &= b_{11}b_{22} \ldots b_{nn}. \end{aligned}$$

注意. 2. (2), (3) と同じようにすると，下三角行列 $C = (c_{ij})$, つまり

$$i < j \quad \Rightarrow \quad c_{ij} = 0$$

に対しても

$$|C| = c_{11}c_{22} \ldots c_{nn}$$

がわかる．