

線形代数学 演習問題 8 (2011 年 12 月 22 日) 略解

担当：境 圭一

1. (1)~(3) のようにすると, $A_3 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 従って $B = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる.

サラスの方法により $|B| = 12$ となるので, $|A| = -|A_3| = -(-3)|B| = 36$.

2. (1) 例えば, (i) 1 行目から 4 行目を引く, (ii) 1 行目から 2 行目を引く, (iii) 1 行目に 3 行目の 2 倍を加える, とすると (この変形は行列式を変えない), 命題 3.3 (1) が使える:

$$|C| = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -5.$$

- (2) 1 行目から 2, 3, 4 行目を引くと (この変形は行列式を変えない), 命題 3.3 (1) が使える:

$$|D| = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -44.$$

- (3) 1 行目から 2 行目の (b/d) 倍を引くと (この変形は行列式を変えない), 命題 3.3 (1) が使える:

$$\begin{aligned} |F| &= \begin{vmatrix} a - (bc)/d & 0 & & \\ c & d & & \\ & & p & q \\ & & r & s \end{vmatrix} = \left(a - \frac{bc}{d}\right) \begin{vmatrix} d & & \\ p & q & \\ r & s & \end{vmatrix} = \left(a - \frac{bc}{d}\right) \cdot d \cdot \begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} \\ &= (ad - bc)(ps - qr). \end{aligned}$$

3. ヒントの通りにすると (行列式は変わらない), 第 4 行が $\vec{0}$ になるから, $|G| = 0$.

注意. 実は 2. (3) は, 文字の中に 0 が含まれていても成り立つ. 一般に, A が $k \times k$ 行列, B が $l \times l$ 行列のとき, $\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = |A||B|$ が成り立つ.