

線形代数学 演習問題 10 (2011 年 1 月 19 日) 略解

担当：境 圭一

1. (1) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ 35 \\ -19 \end{pmatrix}$ とおく. $|A| = 30$ であり, A の各列を \mathbf{b} で置き換えた行列

$$A_1 = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 35 & 5 & -2 \\ -19 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 2 \\ -1 & 35 & -2 \\ 1 & -19 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -7 \\ -1 & 5 & 35 \\ 1 & -1 & -19 \end{pmatrix}$$

の行列式はそれぞれ $|A_1| = 90$, $|A_2| = 120$, $|A_3| = -180$. よってクラメールの公式より

$$x = \frac{90}{30} = 3, \quad y = \frac{120}{30} = 4, \quad z = \frac{-180}{30} = -6.$$

同様にすると, (2) は $(x, y, z) = (-13/2, -139/4, -21/4)$, (3) は $(x, y, z, u) = (-1, 1, 0, 0)$.

2. 3 は省略.

4. (1) 成分を使うと $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3$. 一方で $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta = 3\sqrt{2} \cos \theta$ だから $\cos \theta = 1/\sqrt{2}$. $0 \leq \theta \leq \pi$ だから $\theta = \pi/4$.

(2) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ であり, $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 3$.

(3) $|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \sin \theta = 3\sqrt{2} \sin(\pi/4) = 3$.

5. (1) $-3 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \theta = 10 \cos \theta$ より $\cos \theta = -3/10$. $0 \leq \theta \leq \pi$ より $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{91}/10$.

(2) $|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \sin \theta = \sqrt{91}$.