2011 年度 線形代数学（工・土木）中間試験（2011 年 12 月 8 日 10:45〜12:10）

担当：境 圭一

以下，$\mathbf{u}, \mathbf{v}$ などは（縦）ベクトルを表すものとする．行列 A に対し，その転置行列を ${}^tA$ で表す．行列の成分のうち，何も書いてない部分は全て 0 であるものとする．
答案用紙（2 枚，両面）の指定の箇所に解答してください．要点が押さえられていれば，途中計算は必ずしも全て書く必要はありません．2 枚とも，学籍番号と氏名を忘れず記入してください．

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする．

(1) 次の行列の和，積のうち，定義されるものは計算し，そうでないものは「定義できない」と答えよ．

$$A+2B, \quad A+2D, \quad 2A+C, \quad 2A+{}^tC, \quad BC, \quad DF, \quad FD, \quad D^2$$

(2) 次の連立方程式の解を求めよ．解を持たない場合は理由を答えよ．

$$\text{(i)}\ A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(ii)}\ B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(iii)}\ C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

2. (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & k \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ について，階数 $\mathrm{rank}\,A$, $\mathrm{rank}\,B$ を求めよ．ただし k は定数とする．

(2) θ を定数とする．$X = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ は正則か．正則ならば逆行列を求めよ．

(3) a, θ を定数とし，$a \neq 0$ とする．$Y = \begin{pmatrix} a\cos\theta & -\sin\theta \\ a\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ は正則か．正則ならば逆行列を求めよ．

(4) a, θ を定数とし，$a \neq 0$ とする．4×4 行列 $Z = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & & \\ \sin\theta & \cos\theta & & \\ & & a\cos\theta & -\sin\theta \\ & & a\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ は正則か．

（裏面に続く）

3. (1) $n \times n$ 行列 X が対称行列であり，交代行列でもあるとき，$X = O$ であることを示せ．

   (2) 全ての $n \times n$ 行列 Y は，対称行列と交代行列の和に表せることを示せ．

   (3) (2) のような表し方はただ一通りであることを示せ．

   (4) $n \times n$ 行列 A, B は共に対称行列であるとする．このとき，積 AB が対称行列であることと，$AB = BA$ であることは同値であることを示せ．

4. (1) $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする．xyz 空間内の点 $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ を通り，$\mathbf{u}$ に平行な直線を ℓ_1, 同じく P_0 を通り $\mathbf{v}$ に平行な直線を ℓ_2 とする．ℓ_1, ℓ_2 の方程式を求めよ．

   (2) $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ の両方に直交し，長さが 1 のベクトル $\mathbf{w}$ を一つ求めよ．

   (3) ℓ_1, ℓ_2 の両方を含む平面 H はただ一つに定まる．H の方程式を求めよ．

   (4) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ は正則な行列である．A^{-1} を求めよ．

   (5) (3) で求めた平面 H 上の任意の点 $p = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ は，A を使って別の点 $P = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に移すことができる．移された点 P はどのような図形の上にあるか，その図形を表す方程式を求めよ．

配点：30, 25, 25, 20 $((3 \times 8) + (2 \times 3) = 30$, $(5 + 5) + 5 \times 3 = 25$, $(6 + 6 + 6) + 7 = 25$, $5 \times 4 = 20)$