2011 年度 線形代数学（工・土木）中間試験（2011 年 12 月 8 日 10:45〜12:10） 略解

担当：境 圭一

1. (1) $A+2B=\begin{pmatrix}0&8&-4\\1&4&2\end{pmatrix}$, $A+2D$ と $2A+C$ は定義できない，$2A+{}^tC=\begin{pmatrix}5&1&-5\\2&1&1\end{pmatrix}$, $BC=\begin{pmatrix}3&4\\8&12\end{pmatrix}$, DF は定義できない，$FD=\begin{pmatrix}0&-3\end{pmatrix}$, $D^2=\begin{pmatrix}-3&0\\0&-3\end{pmatrix}$.

   (2) (i) は $x-2z=1$, $x-2z=0$ となり，2 式から $0=1$ となってしまうから，解は存在しない．

   (ii) は $-x+4y=1$, $y+z=1$ となり，例えば $y=t$ とおけば，$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4t-1\\t\\-t+1\end{pmatrix}$ は全ての t に対して解となる．

   (iii) は第一，二行から $x=y=1$ が出て，これらは第三行もみたすから，$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ が解．

2. (1) A については，行列式が $1\cdot 1-2\cdot 2=-3\neq 0$ だから正則で，よって階数は 2.

   B について，例えば (i) 一行目 $\Leftrightarrow$ 二行目，(ii) 二行目から一行目の 2 倍を引く，(iii) 三行目に一行目を足す，(iv) 三行目から二行目の 2 倍を引く，(v) 三行目を -2 で割る，とすると

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&k-2\\0&0&k-3\end{pmatrix}$$

   と変形される．よって $k=3$ のとき階数は 2, また $k\neq 3$ のとき階数は 3.

   (2) 行列式 $|X|=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ だから正則で，$X^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$.

   (3) $|Y|=a\cos^2\theta+a\sin^2\theta=a\neq 0$ だから正則で，$Y^{-1}=\begin{pmatrix}(\cos\theta)/a&(\sin\theta)/a\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$.

   (4) $Z^{-1}=\begin{pmatrix}X^{-1}&O\\O&Y^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta&&\\-\sin\theta&\cos\theta&&\\&&(\cos\theta)/a&(\sin\theta)/a\\&&-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$ が確かめられるから正則．

   次のようにしてもよい．(2) より X の階数は 2 だから，基本変形により $\begin{pmatrix}*&*\\0&*\end{pmatrix}$（各行は $\overrightarrow{0}$ でない）の形に変形される．同じように，Y も基本変形により $\begin{pmatrix}*&*\\0&*\end{pmatrix}$（各行は $\overrightarrow{0}$ でない）の形に変形される．これらと同じ基本変形を Z の一行目と二行目，三行目と四行目に行うと

$$\begin{pmatrix}*&*&&\\&*&&\\&&*&*\\&&&*\end{pmatrix}$$

   （各行は $\overrightarrow{0}$ でない）の形になる．よって Z の階数は 4 であり，従って正則である．

3. (1)〜(3) は第 2 回のレポート問題の略解を参照のこと．(4) は，${}^tA=A, {}^tB=B$ であることから

$$AB\text{ が対称行列}\quad\Leftrightarrow\quad AB={}^t(AB)={}^tB\,{}^tA=BA.$$

4. (1) ℓ_1 上の任意の点 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対し，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t\mathbf{u}$ となるような実数 t が定まる．これがベクトルによる ℓ_1 の方程式である．t を消去すれば，x, y, z を使った方程式が得られる：

$$\ell_1 : (t =)\ \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{5} = -z+4.$$

同様にすると，$\ell_2 : x-1 = y-2 = z-4.$

(2) $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とおく．内積 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$, $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ が共に 0 になるから $2a+5b-c=0$, $a+b+c=0$. さらに $\mathbf{w}$ の長さが 1 だとすれば $a^2+b^2+c^2=1$. これらから，$\mathbf{w} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が一つの答.

(3) H は P_0 を通り，$\mathbf{w}$ に垂直な平面である．第一回の講義でやった方法により，H の方程式は $-2(x-1)+(y-2)+(z-4)=0$, つまり $-2x+y+z=4$.

(4) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

(5) $P = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (X-Y)/3 \\ Y \\ (Y+Z)/2 \end{pmatrix}$. これが (3) で求めた平面 H 上にあるから，代入すると $-2(X-Y)/3+Y+(Y+Z)/2=4$, つまり $-4X+13Y+3Z=24$.
（いいかえると，平面 H は A により別の平面 $-4x+13y+3z=24$ にうつされる）

配点：30, 25, 25, 20 $((3\times 8)+(2\times 3)=30$, $(5+5)+5\times 3=25$, $(6+6+6)+7=25$, $5\times 4=20)$