幾何入門 演習問題 1（2012 年 4 月 12 日）

担当：境 圭一

1. $\mathbb{R}^3$ のベクトルの外積では $(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{w}\neq\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})$ となることがある．このことを

$$\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{w}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$$

について計算し確かめよ．

2. $\boldsymbol{u}$ などは全て $\mathbb{R}^3$ のベクトルとする．以下を示せ．

(1) $(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{u}=0$, $(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{v}=0$

(2) $\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{w}$

(3) $\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})+\boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u})+\boldsymbol{w}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=\boldsymbol{0}$（ヒント：(2) を使う）

(4) $\det(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}$

(5) $(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}=(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{v}$（ヒント：(4) を使う）

(6) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=\big(\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})\big)\cdot\boldsymbol{a}$（ヒント：(5) を使う）

(7) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$（ヒント：(6) に (2) を代入する）

(8) $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ のなす角を θ とするとき，$|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}|=|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\sin\theta$（ヒント：(7) で $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}=\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{d}=\boldsymbol{v}$ とおき，$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\theta$ を使う）

レポート問題 1（4/19 の講義の最初に提出してください）

$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3$ が零ベクトルでなく，$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ が並行でないとき，$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})$ が右手系をなすことを，以下の手順で示せ（絵を描きながら考えよ）．

(1) $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$（ただし $a_1b_2c_3\neq 0$）の形のベクトルを考える．必要ならば $\mathbb{R}^3$ の中で一斉に回転させることにより，$a_1>0$, $b_2>0$ と仮定してよい．$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ が右手系をなすことと $c_3>0$ が同値であることを，絵を描いて確かめよ．

(2) $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ が右手系をなすことと，これらを一斉に回転させて (1) の形の $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ ($a_1>0$, $b_2>0$, $c_3>0$) に重ねられることは同値であることがわかる．一方,「回転させる」とは, $\det P=1$ であるような直交行列 P を掛けることである．以上のことから次を示せ：

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\text{ が右手系をなす}\Leftrightarrow\det(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})>0$$

(3) 上の問題 2. (4) で $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ とおくことにより，$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})$ が右手系をなすことを示せ．