幾何入門 演習問題 2（2012 年 4 月 19 日）

担当：境 圭一

1. 二変数関数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を次のように定義する：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \mathbf{0} \text{ のとき } f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, \qquad f(\mathbf{0}) := 0.$$

   (1) f は原点 $\mathbf{0}$ において連続であることを示せ.（ヒント：極座標を使う）

   (2) $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $|\boldsymbol{u}| = 1$ とする．点 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ における f の $\boldsymbol{u}$ 方向の方向微分を計算せよ.

   (3) (2) の方向微分の値が最大になるときの $\boldsymbol{u}$ を求めよ.

   (4) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1)$ を計算し (3) と比較せよ.

2. 次のベクトル場を図示せよ．ただし (3) では原点での値は考えない.

$$(1)\ \boldsymbol{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (2)\ \boldsymbol{v}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \qquad (3)\ \boldsymbol{w}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

3. (1) $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $L := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$ は $\mathbb{R}^2$ の閉集合 (closed set) であることを示せ.
   （ヒント：補集合 $\mathbb{R}^2 \setminus L = \{(x,y) \mid y \neq 0\}$ が $\mathbb{R}^2$ の開集合 (open set) であることを示す）

   (2) 講義の補題 (Lemma) 4 (3) の三角不等式，補題 5 を証明せよ.

レポート問題 2（4/26 の講義の最初までに提出してください）

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を二変数関数とし，極座標 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を使って

$$g(r,\theta) := f(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

   とおく．$\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)$, $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)$ を，$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ と r, θ を使って表せ.

2. (1) n を自然数とする．$\mathbb{R}^2$ の部分集合

$$U_n := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| < \frac{1}{n},\ |y| < \frac{1}{n} \right\}$$

   は $\mathbb{R}^2$ の開集合であることを示せ.

   (2) 全ての U_n の共通部分

$$U_\infty := \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n \cap \ldots$$

   は $\mathbb{R}^2$ の開集合ではないことを示せ.

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/12_geometry/12_geometry.html