幾何入門 演習問題 3（2012 年 4 月 26 日）

担当：境 圭一

1. 二つの二変数関数 $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ と定数 $a, b \in \mathbb{R}$ に対し，新たな二変数関数 $af + bg$ が

$$(af + bg)(x, y) := af(x, y) + bg(x, y)$$

で定まる．$af + bg$ の勾配ベクトル場は

$$\mathrm{grad}(af + bg) = a \cdot \mathrm{grad}(f) + b \cdot \mathrm{grad}(g)$$

で与えられることを示せ.（注意：$a \cdot \mathrm{grad}(f)$ はベクトル $\mathrm{grad}(f)$ のスカラー倍）

2. (1) 二変数関数 $f(x, y) = x^2 - y^2$ の勾配ベクトル場 $\mathrm{grad}(f)$ を計算し，それを図示せよ.

(2) $\boldsymbol{\ell}(t) = \left(\dfrac{1}{t}, t\right)$ で定まる曲線 $\boldsymbol{\ell} : [1, 2] \to \mathbb{R}^2$ に沿った線積分 $\displaystyle\int_1^2 \mathrm{grad}(f) \cdot d\boldsymbol{\ell}$ を求めよ.

3. 人工衛星を打ち上げるには（重力に対して）仕事が必要だが，周回軌道に乗った後は仕事は必要でない．このことを次のようなモデルで検証しよう.

(1) 地球の重力のモデルとして，$\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$ を考える．$\boldsymbol{\ell}_1(t) = (t, t)$ で定まる直線 $\boldsymbol{\ell}_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^2$（ただし $0 < a < b$）に沿った $\boldsymbol{V}$ の線積分（高さ $\sqrt{2}(b - a)$ までの打ち上げに要する仕事）を求めよ．また，この線積分の $b \to +\infty$ における極限値が有限であることを示し，その物理的な意味を考えよ.

(2) $\boldsymbol{\ell}_2(t) = (b \cos t,\, b \sin t)$ で定まる曲線 $\boldsymbol{\ell}_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ に沿った $\boldsymbol{V}$ の線積分（周回軌道を一周するのに要する仕事）を求めよ.

レポート問題 3（5/10 の講義の最初までに提出してください）

1. 二つの二変数関数 $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ と，一変数関数 $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対し，積 fg と合成 $\varphi \circ f$ が

$$(fg)(\boldsymbol{u}) := f(\boldsymbol{u}) \cdot g(\boldsymbol{u}), \quad (\varphi \circ f)(\boldsymbol{u}) := \varphi(f(\boldsymbol{u})) \qquad (\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2)$$

で定まる．これらに対し，次の公式を証明せよ．ただし関数はいずれも微分可能とする.

$$\mathrm{grad}(fg)(\boldsymbol{u}) = g(\boldsymbol{u}) \cdot \mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{u}) \cdot \mathrm{grad}(g)(\boldsymbol{u}),$$
$$\mathrm{grad}(\varphi \circ f)(\boldsymbol{u}) = \varphi'(f(\boldsymbol{u})) \cdot \mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u})$$

2. (1) $\boldsymbol{\ell}(t) := (e^{-t} \cos t,\, e^{-t} \sin t)$ で定まる曲線 $\boldsymbol{\ell} : [0, T] \to \mathbb{R}^2$ の概形，つまり $\mathbb{R}^2$ の部分集合

$$\{\boldsymbol{\ell}(t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le t \le T\} \subset \mathbb{R}^2$$

の概形を描け.

(2) ベクトル場 $\boldsymbol{V}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対し，極限 $\displaystyle\lim_{T \to \infty} \int_0^T \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{\ell}$ を計算せよ.

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/12_geometry/12_geometry.html