幾何入門 演習問題 4（2012 年 5 月 10 日）

担当：境 圭一

1. (1) $f(x,y) := x^2+y^2$ で定義されるスカラー場（二変数関数）$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ と，$\boldsymbol{\ell}(t) := (-t,\sqrt{1-t^2})$ で定義される曲線 $\boldsymbol{\ell}:[-1,1]\to\mathbb{R}^2$ について，線積分

$$\int_{-1}^{1} f d\boldsymbol{\ell} := \int_{-1}^{1} f(\boldsymbol{\ell}(t)) \left|\frac{d\boldsymbol{\ell}}{dt}(t)\right| dt$$

を計算せよ．

(2) $h(\theta) := -\cos\theta$ とおく．$t=h(\theta)$ とパラメータ変換して得られる曲線 $\tilde{\boldsymbol{\ell}} := \boldsymbol{\ell}\circ h:[0,\pi]\to\mathbb{R}^2$ について，線積分 $\displaystyle\int_0^\pi f d\tilde{\boldsymbol{\ell}}$ を計算し (1) と比較せよ．

2. ベクトル場 $\boldsymbol{V}(x,y) := \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{W}(x,y) := \begin{pmatrix} y^2 \\ x^2 \end{pmatrix}$ を考える．

(1) $\mathrm{grad}(f)=\boldsymbol{V}$ となる f（ポテンシャル）を求めよ．また，$\boldsymbol{\ell}(t) := (t,t)$, $\boldsymbol{m}(t) := (t,t^2)$ で定義される二つの曲線 $\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{m}:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ に対し $\displaystyle\int_0^1 \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_0^1 \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{m}$ が成り立つことを直接計算で確かめよ．

(2) $\boldsymbol{V}$ を図示し，それを参考にして $z=f(x,y)$ のグラフを描け．

(3) $\displaystyle\int_0^1 \boldsymbol{W}\cdot d\boldsymbol{\ell}$ と $\displaystyle\int_0^1 \boldsymbol{W}\cdot d\boldsymbol{m}$ を計算し，$\boldsymbol{W}$ は勾配ベクトル場ではないことを示せ．

3. (1) $U,V\subset\mathbb{R}^2$ が弧状連結で $U\cap V\neq\emptyset$ のとき，和集合 $U\cup V$ も弧状連結であることを示せ．

(2) $U,V\subset\mathbb{R}^2$ が弧状連結で $U\cap V\neq\emptyset$ のとき，$U\cap V$ は弧状連結でないことがある．そのような例を挙げよ．

レポート問題 4（5/17 の講義の最初までに提出してください）

1. $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2-6xy+3y^2 \\ -3x^2+6xy-3y^2 \end{pmatrix}$ を考える．$\boldsymbol{\ell}(t) := (t,2t^2)$ で定義される $\mathbb{R}^2$ 上の曲線 $\boldsymbol{\ell}:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ に沿った線積分 $\displaystyle\int_0^1 \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{\ell}$ を計算せよ.（ヒント：ポテンシャルを考えよ）

2. 一次元の円周 $S^1\subset\mathbb{R}^2$ を

$$S^1 := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$$

で定義する．S^1 は弧状連結であることを示せ．