幾何入門 演習問題 5（2012 年 5 月 17 日）

担当：境 圭一

1. 領域 $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$ を図示せよ．$\boldsymbol{\ell} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を

$$\boldsymbol{\ell}(t) := \begin{cases} \bigl(-2t+4n+1,\ 1-|-2t+4n+1|\bigr) & 2n \leq t \leq 2n+1 \\ \bigl(2t-4n-3,\ -1+|2t-4n-3|\bigr) & 2n+1 \leq t \leq 2(n+1) \end{cases}$$

（ただし n は全ての整数を動く）で定めると，$\boldsymbol{\ell}$ は Ω の境界 $\partial\Omega$ を表す区分的に正則な閉曲線で，Ω に適合した向きを定めていることを確かめよ．また $\boldsymbol{\ell}$ の周期を求めよ.（ヒント：$n = 0, 1$ のときを考えてみよ）

2. 領域 $\Omega_a := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2 + y^2 \leq 1\}$ を考え，境界 $\partial\Omega_a$ を表す曲線 $\boldsymbol{\ell}_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を $\boldsymbol{\ell}_a(t) := (\cos t + a,\ \sin t)$ で定める（この $\boldsymbol{\ell}_a$ は Ω に適合した向きを定めている）.

(1) $\boldsymbol{\ell}_a$ の周期 T を求めよ.

(2) $\boldsymbol{\ell}_a(t) \in \partial\Omega$ において，Ω の内側から外側に向かう単位法ベクトル $\boldsymbol{n}_a(t)$ を求めよ.

(3) Ω_a 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(x,y) := (x^2,\ y^2)$ に対し，線積分

$$\int_0^T \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}_a \, dl_a := \int_0^T \boldsymbol{V}(\boldsymbol{\ell}_a(t)) \cdot \boldsymbol{n}_a(t) \left| \frac{d\boldsymbol{\ell}_a}{dt}(t) \right| dt$$

を求めよ.（3 倍角の公式 $4\cos^3 t = \cos 3t + 3\cos t,\ 4\sin^3 t = -\sin 3t + 3\sin t$ を用いよ）

(4) (3) の値が 0 になるような a を求め，線積分が 0 になる「物理的な」理由を考えよ.

レポート問題 5（5/24 の講義の最初までに提出してください）
（信州大学理学部・平成 24 年度）$|x| \leq 1$ で定義される二つの関数

$$f(x) = \sqrt{|x|} + \sqrt{1-x^2}, \quad g(x) = \sqrt{|x|} - \sqrt{1-x^2}$$

を考える.

(1) $x = 0,\ x = \pm 1$ における $f'(x)$ と $g'(x)$ の挙動に注意して，関数 f, g のグラフの概形を描け. 変曲点，凹凸は調べなくてよい.

(2) f, g のグラフで表される曲線をうまくパラメータ付けして正則な閉曲線にできるか？