幾何入門 演習問題 6（2012 年 5 月 24 日）

担当：境 圭一

1. $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}$ を領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 上のベクトル場，$f : \Omega \to \mathbb{R}$ を C^2 級の二変数関数とする．次の等式を示せ．

   (1) $\mathrm{div}(\boldsymbol{V} + \boldsymbol{W}) = \mathrm{div}\boldsymbol{V} + \mathrm{div}\boldsymbol{W}$

   (2) $\mathrm{div}(f\boldsymbol{V}) = \mathrm{grad}(f) \cdot \boldsymbol{V} + f\,\mathrm{div}\boldsymbol{V}$（第一項は $\mathrm{grad}(f)$ と $\boldsymbol{V}$ の内積）

   (3) $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}(f) = 0$

2. $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 1\}$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(x, y) = \begin{pmatrix} x+y \\ -y \end{pmatrix}$ を考える．

   (1) 境界 $\partial\Omega$ を表す曲線として $\boldsymbol{\ell}(t) := (\cos t + a, \sin t + b)$ を取る．$\boldsymbol{\ell}$ の周期 T を求めよ．また，$\boldsymbol{\ell}(t) \in \partial\Omega$ において，Ω の内側から外側に向かう単位法ベクトル $\boldsymbol{n}(t)$ を求めよ．

   (2) 発散 $\mathrm{div}\boldsymbol{V}$, 回転 $\mathrm{rot}\boldsymbol{V}$ を求めよ．

   (3) $\displaystyle\int_0^T \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{\ell}$ ならびに $\displaystyle\int_\Omega \mathrm{div}\boldsymbol{V}\, dxdy$ をそれぞれ直接計算して値を比べよ．

   (4) $\displaystyle\int_0^T \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{\ell}$ ならびに $\displaystyle\int_\Omega \mathrm{rot}\boldsymbol{V}\, dxdy$ をそれぞれ直接計算して値を比べよ．

3. (1) $\mathbb{R}^2$ 内で，周期 T の正則な閉曲線 $\boldsymbol{\ell}$ を任意に取り，$\tilde{\boldsymbol{\ell}}(t) := \boldsymbol{\ell}(-t)$ とおく．任意のベクトル場 $\boldsymbol{V}$ に対し，$\displaystyle\int_0^T \boldsymbol{V} \cdot d\tilde{\boldsymbol{\ell}} = -\int_0^T \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{\ell}$ を示せ．

   (2) $\mathbb{R}^2$ 内で，周期 S の正則な閉曲線 $\boldsymbol{\ell}$ で囲まれた有界領域 Ω を考え，$\boldsymbol{\ell}$ は Ω に適合した向きでパラメータ付けする．Ω の内部に，周期 T の正則な閉曲線 $\boldsymbol{m}$ を任意に取り，$\boldsymbol{m}$ で囲まれる有界領域 Ω' に適合した向きでパラメータ付けする．Ω 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}$ が $\mathrm{rot}\boldsymbol{V} = 0$ をみたすとき，$\displaystyle\int_0^S \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_0^T \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{m}$ を示せ．

レポート問題 6（5/31 の講義の最初までに提出してください）**名前を忘れず書くこと**

$\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(x, y) = (x, y)$ を考える．

(1) 境界 $\partial\Omega$ を表す周期 4 の曲線 $\boldsymbol{\ell} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を，辺ごとに次のように定める：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\ell}(t) = (t,\ 0) \quad & (0 \leq t \leq 1), \quad (1,\ t-1) \quad (1 \leq t \leq 2), \\ (-t+3,\ 1) \quad & (2 \leq t \leq 3), \quad (0,\ -t+4) \quad (3 \leq t \leq 4). \end{aligned}$$

辺ごとに外向きの単位法ベクトル $\boldsymbol{n}(t)$ を求めよ．

(2) 線積分の和 $\displaystyle\sum_{0 \leq n \leq 3} \int_n^{n+1} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{\ell}$ ならびに $\displaystyle\int_\Omega \mathrm{div}\boldsymbol{V}\, dxdy$ を計算し，値を比べよ．

(3) 線積分の和 $\displaystyle\sum_{0 \leq n \leq 3} \int_n^{n+1} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{\ell}$ ならびに $\displaystyle\int_\Omega \mathrm{rot}\boldsymbol{V}\, dxdy$ を計算し，値を比べよ．

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/12_geometry/12_geometry.html