幾何入門 演習問題 7（2012 年 5 月 31 日）

担当：境 圭一

1. 以下のベクトル場 $\boldsymbol{V}$ はいずれも $\mathbb{R}^2$ 全体で定義される．このうち，$\boldsymbol{V} = \mathrm{grad}(f)$ の形になるものは，そのような f（ポテンシャル）を求めよ．そうならないものは，理由を述べよ．

$$\text{(i) } \boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \quad \text{(ii) } \boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \quad \text{(iii) } \boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} x - 2y^2 \\ -4xy + 6y \end{pmatrix} \quad \text{(iv) } \boldsymbol{V} = \frac{2}{x^2 + y^2 + 1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

2. 放物線 $y = x^2$ と直線 $y = 1$ で囲まれる領域を Ω とおく．

   (1) 周期 4 の曲線 $\boldsymbol{\ell} : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2$ を

$$\boldsymbol{\ell}(t) = (t,\, t^2) \quad (-1 \le t \le 1), \qquad \boldsymbol{\ell}(t) = (-t + 2,\, 1) \quad (1 \le t \le 3)$$

   となるように定めると，$\boldsymbol{\ell}$ は区分的に正則な閉曲線で，Ω に適合した向きを定めることを示せ．放物線の部分と直線の部分それぞれについて，$\boldsymbol{\ell}(t)$ において Ω の外側に向かう単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}(t)$ を求めよ．

   (2) Ω 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(x, y) = \begin{pmatrix} x + 2y \\ x - y \end{pmatrix}$ について，$\displaystyle\int_{-1}^{3} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{\ell}$, $\displaystyle\int_{-1}^{3} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{\ell}$ を求めよ．

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を，$f(x) \ge 0$ であるような一変数関数とする．領域 Ω を

$$\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}$$

   で定義し，$\partial\Omega$ を表す周期 T の区分的に正則な閉曲線 $\boldsymbol{\ell} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ と，$\boldsymbol{\ell}(t)$ において Ω の内側から外側に向かう単位法ベクトル $\boldsymbol{n}(t)$ を取る．$\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}$ で $\mathrm{div}\boldsymbol{V} = 1$ をみたすものに対し，次の等式を示せ．

$$\int_0^T \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{\ell} = \int_a^b f(x) dx$$

レポート問題 7（6/6（**水**）18:30 **まで**に提出してください）**名前を忘れず書くこと**

$\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 9\}$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(x, y) = \left(\dfrac{y}{x^2 + y^2}, \dfrac{-x}{x^2 + y^2} \right)$ を考える．

(1) 領域 Ω を図示せよ．また $\mathrm{rot}\boldsymbol{V} = 0$ を示せ．

(2) $\boldsymbol{\ell}(t) := 2 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ で定義される閉曲線 $\boldsymbol{\ell} : \mathbb{R} \to \Omega$ を考える．線積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{\ell}$ を計算し，値が 0 でないことを確かめよ．

注意．レポート問題は，単連結でない 領域上では，$\mathrm{rot}\boldsymbol{V} = 0$ であっても $\boldsymbol{V} = \mathrm{grad}(f)$ となる f が存在するとは限らないことを示す例になっている．

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/12_geometry/12_geometry.html