幾何入門 演習問題 8（2012 年 6 月 14 日）

担当：境 圭一

1. （原点中心，半径 1 の）2 **次元球面** $S^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$ に対し，講義でやった局所座標の与え方を復習する．

   (i) $U := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 < x < 2\pi,\ |y| < \dfrac{\pi}{2}\right\}$ とおき，$\boldsymbol{\varphi} : U \to \mathbb{R}^3$ を
   $$\boldsymbol{\varphi}(x,y) := {}^t(\cos x \cos y,\ \sin x \cos y,\ \sin y) \quad （縦ベクトル）$$
   で定める．$\boldsymbol{\varphi}(x,y) \in S^2$ を確かめよ．また S^2 上で $\boldsymbol{\varphi}$ の像にならない部分を図示せよ．

   (ii) $\boldsymbol{\varphi}$ は単射であることを示せ．つまり，$(\alpha,\beta),(\alpha',\beta') \in U$ に対し，$\boldsymbol{\varphi}(\alpha,\beta) = \boldsymbol{\varphi}(\alpha',\beta')$ ならば $(\alpha,\beta) = (\alpha',\beta')$ であることを示せ.（ヒント：まず第 3 成分を比べよ）

   (iii) 任意の $\boldsymbol{a} \in U$ に対し，Jacobi 行列 $D\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a}) = \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x}(\boldsymbol{a}) \quad \dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial y}(\boldsymbol{a})\right)$ の階数は 2 である，つまり任意の $\boldsymbol{a} \in U$ において $\dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x}(\boldsymbol{a})$ と $\dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial y}(\boldsymbol{a})$ は一次独立であることを示せ．即ち次を示せばよい：
   $$k\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x}(\boldsymbol{a}) + l\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial y}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^3 \quad \Rightarrow \quad k = l = 0$$
   （ヒント：第 3 成分を比べる）

2. 例えば $(1,0,0) \in S^2$ は前問の $\boldsymbol{\varphi}$ の像に入っていない．この点の近くの局所座標はどのように与えればよいか？

3. S^2 の「北半球」を $S^2_+ = \{(x,y,z) \in S^2 \mid z > 0\}$ とおく．$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$ に対し，写像 $\boldsymbol{\varphi} : V \to S^2_+$ を
   $$\boldsymbol{\varphi}(x,y) := \left(x, y, \sqrt{1-x^2-y^2}\right)$$
   で定めると，$\boldsymbol{\varphi}$ は $p \in S^2_+$ の近くの局所座標を定めることを示せ．

4. 前問にならって,「南半球」や「赤道」$\{(x,y,z) \in S^2 \mid z = 0\}$ 上の点 p については，p の近くの局所座標をどのように定めればよいか考えよ．

レポート問題 8（6/21 の講義開始時までに提出してください）**名前を忘れず書くこと**

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級の二変数関数とし，$S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x,y)\}$ を f のグラフとする．$\boldsymbol{\varphi} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を $\boldsymbol{\varphi}(x,y) := {}^t(x,y,f(x,y))$（縦ベクトル）で定義すると，$\boldsymbol{\varphi}$ は S の局所座標を定めることを示せ．つまり，次のことを示せ．

(1) $\boldsymbol{\varphi}(x,y) \in S$ であり，全ての $p \in S$ は $\boldsymbol{\varphi}(\mathbb{R}^2)$ に含まれる．

(2) $\boldsymbol{\varphi}$ は単射である．つまり $\boldsymbol{\varphi}(x,y) = \boldsymbol{\varphi}(x',y')$ ならば $(x,y) = (x',y')$ である．

(3) Jacobi 行列 $D\boldsymbol{\varphi}$ は常に階数 2 である．つまり任意の $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ に対し，$\dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x}(\boldsymbol{a})$ と $\dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial y}(\boldsymbol{a})$ は一次独立．

注意.「局所」と言っても，この場合の $\boldsymbol{\varphi}$ は一つで S 全体に（大域的に）座標を定めている．

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/12_geometry/12_geometry.html