幾何入門 演習問題 10（2012 年 6 月 28 日）

担当：境 圭一

1. 二変数関数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ のグラフ $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=f(x,y)\}$ を考える．S 上の点 $p=(a,b,f(a,b))$ における接平面 T_pS を表す式を以下の手順で求めよ．
   (1) S の（局所）座標として，$\boldsymbol{\varphi}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{\varphi}(x,y):=(x,y,f(x,y))$ を取る．$\dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial y}$ と $\boldsymbol{v}:=\dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial x}\times\dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial y}$ を計算せよ（$\boldsymbol{v}(x,y)$ は $(x,y,f(x,y))$ において S に直交するベクトル）．
   (2) 任意の $\boldsymbol{u}=(x,y,z)\in T_pS$ に対し．$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}(a,b)=0$ である．このことから x,y,z がみたす式を求めよ．これが T_pS を表す式である．
   (3) 別の求め方として，三変数関数 $g(x,y,z):=f(x,y)-z$ を考えると，$S=g^{-1}(0)$ である．$T_pS=\{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^3 \mid \boldsymbol{u}\cdot\mathrm{grad}(g)(p)=0\}$ と考えて T_pS を表す式を求めよ．

2. (1) 二変数関数 $f(x,y)=xy$ のグラフ $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=xy\}$ 上の点 $p=(-1,2,-2)$ における接平面を表す式を，前問を参考にして求めよ．
   (2) (1) で求めた式で表される平面は点 p を通っていない．原点が点 p に移るように平行移動した平面を求めよ.（ヒント：(x,y,z) を $(x,y,z)-p$ でおきかえればよい）

3. （教科書の例 2.12）$\boldsymbol{\varphi}:\mathbb{R}\times(-1,1)\to\mathbb{R}^3$ を

$$\boldsymbol{\varphi}(s,t):=((2+t\cos(s/2))\cos s,\ (2+t\cos(s/2))\sin s,\ t\sin s)$$

   で定義し，$\boldsymbol{\varphi}$ の像 $\boldsymbol{\varphi}(\mathbb{R}\times(-1,1))$ を M とおく．
   (1) $r=2+t\cos(s/2)$, $\theta=s$, $z=t\sin(s/2)$ とおくと，$\boldsymbol{\varphi}=(r\cos\theta,r\sin\theta,z)$ である．平面 $\theta=\theta_0$（定数）で M を切ると，切り口に現れる図形は次の線分であることを示せ：

$$\bigl(\cos(\theta_0/2)\bigr)z=\bigl(\sin(\theta_0/2)\bigr)(r-2),\quad |r-2|<|\cos(\theta_0/2)|,\quad |z|<\sin(\theta_0/2)$$

   (2) θ_0 を 0 から 2π まで動かし，M の概形を描け.（M は Möbius の帯である）
   (3) $\dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial s}$, $\dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}$ ならびに $\dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial s}\times\dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}$ を計算せよ.
   (4) M 上の法ベクトル場 $\boldsymbol{n}:M\to\mathbb{R}^3$ で，$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\varphi}(0,0))=\left(\dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial s}\times\dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}\right)(0,0)$ をみたすものが存在したと仮定する．$\boldsymbol{n}$ は連続だから $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\varphi}(s,0))=\left(\dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial s}\times\dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}\right)(s,0)$ $(\forall s)$ でなければならない．$s=2\pi$ のときを考えて矛盾を導け.

レポート問題 10（7/5 の講義開始時までに提出してください）**名前を忘れず書くこと**

三変数関数 $h(x,y,z):=x^2+y^2-z^2-1$ を考える．$S:=h^{-1}(0)$ は一葉双曲面である．

(1) $p:=(2,-1,2)\in S$ であることを示し，p における S の単位法ベクトルを一つ求めよ．

(2) p において S に接する平面を表す方程式を求めよ.（ヒント：上の問題 2.(2) 参照）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/12_geometry/12_geometry.html