幾何入門 演習問題 11（2012 年 7 月 5 日）

担当：境 圭一

1. $S^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$, $S^2_+ := \{(x,y,z) \in S^2 \mid z>0\}$（北半球）とおく．$S^2_+$ は関数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ のグラフなので，座標 $\boldsymbol{\varphi}: U \to S^2_+$ として次のものを取れる：

$$U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}, \quad \boldsymbol{\varphi}(x,y) := \left(x, y, \sqrt{1-x^2-y^2}\right)$$

   (1) $\boldsymbol{\varphi}(U) = S^2_+$ である（つまり，$\boldsymbol{\varphi}$ は全射である）ことを確かめよ．

   (2) S^2 の向きとして，原点から見て「外向き」の法ベクトル $\boldsymbol{n}: S^2 \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{n}(p)=p$ を取る．例えば $p=(0,0,1) \in S^2$ に対し $\boldsymbol{n}(p) = {}^t(0,0,1)$ である．
   $\boldsymbol{\varphi}$ は S^2 の向き $\boldsymbol{n}$ を保つ座標であることを示せ．つまり，各 $p=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a}) \in S^2_+$ に対し，$\dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x}(\boldsymbol{a}) \times \dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial y}(\boldsymbol{a}) = k\boldsymbol{n}(p)$ となる<u>正の数</u> k（p に依存する）が存在することを示せ．

   (3) ベクトル場 $\boldsymbol{V}(x,y,z) = {}^t(x,y,z)$ に対し，S^2_+ に沿った面積分

$$\int_{S^2_+} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S} := \int_U \boldsymbol{V}(\boldsymbol{\varphi}(x,y)) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial y}(x,y) \right) dxdy$$

   を計算せよ．

   (4) $\boldsymbol{\psi}: U \to S^2_+$, $\boldsymbol{\psi}(x,y) := \left(-y, x, \sqrt{1-x^2-y^2}\right)$ も S^2_+ の座標である．$\boldsymbol{\psi}$ も向きを保つことを示せ．$\boldsymbol{\psi}$ を使って $\displaystyle\int_{S^2_+} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S}$ を計算し，前問の結果と比べよ．

2. 一葉双曲面 $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2-z^2=1\}$ を考える．S の向きとして，原点から見て「外向きの」法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を取る．例えば $p=(1,0,0) \in S$ に対し $\boldsymbol{n}(p)=(1,0,0)$.

   (1) p の近くの座標 $\boldsymbol{\varphi}: U \to S$ として

$$U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}, \quad \boldsymbol{\varphi}(x,y) := (\sqrt{1-x^2+y^2}, x, y)$$

   を取る．これが実際に p の近くの座標を定めていることを確かめよ．

   (2) $\boldsymbol{\varphi}$ は向きを保つことを示せ．

   (3) $A := \boldsymbol{\varphi}(U) \subset S$ とおく．$x \neq 0$ のとき定義されるベクトル場 $\boldsymbol{V}(x,y,z) = {}^t\left(\dfrac{1}{x^2}, \dfrac{y}{x}, \dfrac{z}{x}\right)$ に対し．$\displaystyle\int_A \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S}$ を求めよ．

3. $f: (-1,1) \to (-3,1)$ を，$f(x) := 2x-1$ で定義する．f は微分同相写像であることを示せ．つまり，逆写像 $g = f^{-1}: (-3,1) \to (-1,1)$ が存在し，f, g ともに C^∞ 級であることを示せ．

レポート問題 11（7/12 の講義開始時までに提出してください）**名前を忘れず書くこと**

問題 1. の $\boldsymbol{\varphi}$ を使って，$\boldsymbol{W}(x,y,z) = {}^t(2xz,\, 2yz,\, z^2)$ に対し，$\displaystyle\int_{S^2_+} \boldsymbol{W} \cdot d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/12_geometry/12_geometry.html