幾何入門 演習問題 12（2012 年 7 月 12 日）

担当：境 圭一

※ 閉曲面 S の向きは，S が囲む有界領域の内側から外側に向かう法線ベクトルで定める．

1. $S \subset \mathbb{R}^3$ を閉曲面とし，Ω を S で囲まれた有界領域とする．$f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級関数とする．

   (1) $\Delta f := \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ とおく．$\mathrm{div}(\mathrm{grad}(f)) = \Delta f$ を示せ．

   (2) $\mathrm{div}(g\,\mathrm{grad}(f) - f\,\mathrm{grad}(g)) = g\Delta f - f\Delta g$ を示せ．

   (3) (2) と Gauss の発散定理を使って，次の Green の公式を示せ：

$$\int_\Omega (g\Delta f - f\Delta g)dxdydz = \int_S (g\,\mathrm{grad}(f) - f\,\mathrm{grad}(g)) \cdot d\boldsymbol{S}$$

2. 向き $\boldsymbol{n} : S \to \mathbb{R}^3$（法線ベクトル）が与えられた曲面 S を考える．逆の向き $-\boldsymbol{n}$ を入れた曲面を $-S$ と書くことにするとき，$\displaystyle\int_{-S} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S} = -\int_S \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S}$ を示せ.（ヒント：向き $\boldsymbol{n}$ を保つ座標 $\boldsymbol{\varphi} : U \to S$ と，保たない座標 $\boldsymbol{\varphi}' : U' \to S$ で $\boldsymbol{\varphi}(U) = \boldsymbol{\varphi}'(U')$ をみたすものを比べる）

3. 閉曲面 $E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x/2)^2 + (y/3)^2 + (z/4)^2 = 1\}$ を考える．

   (1) E は曲面であることを示せ（ヒント：定理 15 を使うとよい）．また E の概形を描け．

   (2) $S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ と，$\mathrm{div}\boldsymbol{V} = 0$ をみたすベクトル場 $\boldsymbol{V}$ に対し，$\displaystyle\int_E \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_{S^2} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S}$ を示せ.（ヒント：E と S^2 で囲まれた有界領域 Ω に対して Gauss の発散定理を使う．$\partial\Omega = E \cup (-S^2)$. 問題 2. も参照）

   (3) $\mathbb{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(x, y, z) := \dfrac{(x,\, y,\, z)}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$ に対し，$\displaystyle\int_E \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．

4. $T := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 = 16(x^2 + y^2)\}$ とおく．

   (1) $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とおき，T を r, θ, z で表せ．

   (2) T の概形を描け.（実はトーラスである）

   (3) $\mathbb{R}^3$ の極座標 $x = r\cos\alpha\cos\beta,\ y = r\sin\alpha\cos\beta,\ z = r\sin\beta$ を考える．T を r, α, β で表せ．

レポート問題 12（7/19 の講義開始時までに提出してください）**名前を忘れず書くこと**

S を閉曲面とする．$\boldsymbol{V}(x, y, z) := \begin{pmatrix} (y+z)yz \\ (z+x)zx \\ (x+y)xy \end{pmatrix}$ に対し，$\displaystyle\int_S \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．

（ヒント：問題 1. で $f(x, y, z) = xyz,\ g(x, y, z) = x + y + z$ とおく）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/12_geometry/12_geometry.html