幾何入門 演習問題13（2012年7月19日）

担当：境 圭一

1. (1) $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ とし，$f : \Omega \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級関数とする．$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(f)) = \mathbf{0}$ を示せ．

   (2) $\boldsymbol{V} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ をベクトル場とする．$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\boldsymbol{V}) = 0$ を示せ．

2. 次のベクトル場 $\boldsymbol{V} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ のうち，$\boldsymbol{V} = \mathrm{grad}(f)$ の形になるものはどれか.（ヒント：$\mathbb{R}^3$ が単連結であることから，$\mathrm{rot}\boldsymbol{V} = \mathbf{0}$ かどうかを調べればよい）

   (1) $\boldsymbol{V}(x, y, z) = (x, y, z)$

   (2) $\boldsymbol{V}(x, y, z) = (F(x), G(y), H(z))$, ただし F, G, H は一変数関数

   (3) $\boldsymbol{V}(x, y, z) = (y, z, x)$

   (4) $\boldsymbol{V}(x, y, z) = (2x + y - z,\ x - y - 3z,\ -x - 3y + 4z)$

3. （教科書の例 2.38）S を閉曲面とするとき，$\displaystyle\int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S} = 0$ を示せ．

4. （教科書の系 2.40）$S_1,\ S_2$ を向きのついた境界つき曲面とし，境界のみで交わるとする：$S_1 \cap S_2 = \partial S_1 = \partial S_2$（$=: L$ とおく）．$i = 1, 2$ に対し，S_i の向きから定まる ∂S_i の向きを考えると，L に二つの向きが入ることになる．ここでは，二つの向きが一致するように S_i に向きが定まっているとする．

   (1) あるベクトル場 $\boldsymbol{V} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を使って $\boldsymbol{W} = \mathrm{rot}\boldsymbol{V}$ と表されるような $\boldsymbol{W}$ を考える．このとき Stokes の定理を使って $\displaystyle\int_{S_1} \boldsymbol{W} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_{S_2} \boldsymbol{W} \cdot d\boldsymbol{S}$ を示せ．

   (2) $i = 1, 2$ に対し，S_i の向きを定める法ベクトル場を $\boldsymbol{n}_i : S_i \to \mathbb{R}^3$ とする．$p \in L$ に対し，$\boldsymbol{n}_1(p) = -\boldsymbol{n}_2(p)$ であることを示せ．

   (3) 和集合 $S := S_1 \cup S_2$ が滑らかな閉曲面になるとする．$\boldsymbol{n} : S \to \mathbb{R}^3$ を

   $$\boldsymbol{n}(q) := \begin{cases} \boldsymbol{n}_1(q) & q \in S_1 \\ -\boldsymbol{n}_2(q) & q \in S_2 \end{cases}$$

   で定めると，(2) より $\boldsymbol{n}$ は連続になり，S の向きを定める．$\mathrm{div}\boldsymbol{W} = 0$ が成り立つとき（$\boldsymbol{W} = \mathrm{rot}\boldsymbol{V}$ は仮定しない），S に対し Gauss の発散定理を使って (1) と同様の等式を示せ．

レポート問題 13（7/26 の講義開始時までに提出してください）**名前を忘れず書くこと**

$S := \{(x, y, z) \in S^2 \mid z \geq 0\}$ とする．ベクトル場 $\boldsymbol{V}(x, y, z) := (y(1 - z),\ x(z - 1),\ xyz)$ に対し，$\displaystyle\int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．
（定義通りに計算するのは大変だが，Stokes の定理を使えば計算量は少なく済む）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/12_geometry/12_geometry.html