幾何入門 演習問題 14（2012 年 7 月 26 日）

担当：境 圭一

1. $f(x,y,z) := x^2+y^2+z^2-9$ とおき，$S := f^{-1}(0) = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=0\}$ とする．
   (1) $\mathrm{grad}(f)$ を求め，$\mathrm{grad}(f)(p) = \mathbf{0}$ となる点 $p\in\mathbb{R}^3$ を求めよ．
   (2) S は曲面であることを示せ.（ヒント：定理 15 を使う）また S の概形を図示せよ．
   (3) $q = \left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}, \sqrt{3}, -\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right) \in S$ を示し，q において S に接する平面を求めよ.（補題 16 を使うとよい．求める平面は q を通ることに注意）
   (4) S の向きを，S が囲む有界領域の内側から外側に向かう法線ベクトルで定める．$U := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<9\}$ とおき，$\boldsymbol{\varphi} : U \to S$ を $\boldsymbol{\varphi}(x,y) := (x,y,\sqrt{9-x^2-y^2})$ で定めると $\boldsymbol{\varphi}$ は局所座標である．$\boldsymbol{\varphi}$ は向きを保つことを示せ．
   (5) ベクトル場 $\boldsymbol{V}(x,y,z) := (x^3,\, y^3,\, z^3)$ に対し，$\mathrm{div}\boldsymbol{V}$, $\mathrm{rot}\boldsymbol{V}$ を計算せよ．
   (6) $\displaystyle\int_S \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{S}$ を計算せよ.（ヒント：Gauss の発散定理と $\mathbb{R}^3$ の極座標 $x = r\cos\alpha\cos\beta$, $y = r\sin\alpha\cos\beta$, $z = r\sin\beta$, $r\geq 0$, $0\leq\alpha\leq 2\pi$, $|\beta|\leq\dfrac{\pi}{2}$ を使う．$dxdydz = r^2\cos\beta\, drd\alpha d\beta$）
   (7) ベクトル場 $\boldsymbol{W}(x,y,z) := (y-z,\, z-x,\, x-y)$ に対し，$\mathrm{div}\boldsymbol{W}$, $\mathrm{rot}\boldsymbol{W}$ を計算せよ．
   (8) 境界つき曲面 $S' := \{(x,y,z)\in S \mid z\geq 0\}$ に，S と同じ向きを入れる．$\displaystyle\int_{S'} \mathrm{rot}\boldsymbol{W}\cdot d\boldsymbol{S}$ を計算せよ.（ヒント：(4) の座標を使ってもよいし，Stokes の定理を使ってもよい）

2. $\Omega := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y\neq 0$ または $z\neq 0\}$ とする（$\mathbb{R}^3$ から x 軸を除いた集合）.
   (1) Ω 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(x,y,z) := \left(0,\, \dfrac{-z}{y^2+z^2},\, \dfrac{y}{y^2+z^2}\right)$ に対し，$\mathrm{div}\boldsymbol{V}$, $\mathrm{rot}\boldsymbol{V}$ を計算せよ．
   (2) Ω 内の閉曲線 $\boldsymbol{\ell}(t) := (0,\, \cos t,\, \sin t)$ に沿った線積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{\ell}$ を計算せよ．
   (3) Ω が単連結だと仮定して矛盾を導け．

レポート問題 14（**8/1（水）18:00** までに 403 に提出してください）**名前を忘れず書くこと**

$g(x,y,z) := x^2+y^2-z^2-1$ とおき，$S := g^{-1}(0) = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z)=0\}$ とする．

(1) $\mathrm{grad}(g)(p) = \mathbf{0}$ となる点 $p\in\mathbb{R}^3$ を求めよ．S は曲面であることを示せ．

(2) S を平面 $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=k\}$ で切った切り口を図示し，これを使って S の概形を描け．

(3) $q = (2,-1,2)\in S$ であることを示し，q において S に接する平面を求めよ．

(4) $S_1 := \{(x,y,z)\in S \mid |z|\leq 1\}$ とおく．ベクトル場 $\boldsymbol{V}(x,y,z) := (y-z,\, z-x,\, x-y)$ に対し，面積分 $\displaystyle\int_{S_1} \mathrm{rot}\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．ただし S の向きは $\mathbf{0}\in\mathbb{R}^3$ から見て外に向かう法線ベクトルで定め，S_1 にも同じ向きを入れるものとする．

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/12_geometry/12_geometry.html