

2012年度 幾何入門 期末試験 結果・コメント

担当：境 圭一

平均点は 66.3 点，最高点は 82 点でした．点数分布と各問題の平均点は以下のとおりです．

点数	~ 49	50 ~ 59	60 ~ 69	70 ~ 79	82	問題	1	2	3	4
人数	4	6	26	23	2	平均点	27.4	25.3	12.9	0.6

答案用紙 No. 1 の右上に赤 で囲ってあるのが期末試験の点数，その下に青 で囲ってあるのは，前期を通しての レポートの点数です（最大 30 点）．大問ごとの点数は各用紙の右下または裏面に書いてあります．

講義全体の成績分布は次の通りです．レポートと試験の成績が大体比例したので「秀」「優」が多くなりました．「不受講」は数字に含んでいません．

成績	不可	可	良	優	秀
人数	5	11	17	13	18

期末試験について，やったことのある前半の問題はよくできているのに対し，あまりなじみのない後半の問題に対処できていません．応用が利くようにするには，普段から教科書に書いてあることを掘り下げて考えるようにすることが必要だと思います．一つの定理について

- 定理の仮定は何で，主張は何か

というのは誰しも考えるわけですが，

- 証明の中で仮定はどこに使われているのか，その仮定は本当に必要なのか
- 定理の具体例にはどんなものがあるか

といったことまで考えるようにすると，使える定理として身につくと思います．

また，全体的に日本語に難があります（そのあたりについてはかなり甘く採点しました）．例えば 1. (1) の一次独立性については

$$k \frac{\partial \varphi}{\partial x} + l \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \text{ と仮定すると } \dots \quad k = l = 0 \text{ となるから } \frac{\partial \varphi}{\partial x} \text{ と } \frac{\partial \varphi}{\partial y} \text{ は一次独立}$$

という答案が正しいわけですが，単に “ $k \frac{\partial \varphi}{\partial x} + l \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$ ” としか書いていない答案が多く見られます．これでは， $= 0$ と仮定しているのか，事実として $= 0$ であると主張しているのか不明です．もちろん今の場合は前者しかあり得ないわけですが，そのことを読み手に推測させる書き方は答案とは呼べません．皆さんは当たり前だと思っていることが，読む人にとっても当たり前とは限りません．かといって（このコメントのように）全てのことを詰め込んだ長い文章もやはり読んでもらえません．読みやすい文章を書く技術は重要ですが，簡単には身につけません．今から心がけて訓練してください．

採点には万全を期しましたが，万が一誤りがあると思われる場合は，早めに申し出てください．答案は全てコピーを取り保存していますので，ただちに調べます．成績は 8/20（月）に確定しますので，それまでお願いします．成績はお知らせしていた方法でつけますので，各自で計算してください．小数点以下切り上げです．

以下，問題ごとのコメントです．

1. おおむね期待通りの出来でした。(5)では偏微分の順序交換ができることに言及すべきですが、そこにはこだわりませんでした。
2. 前問よりは論理を細かく見ました。(2)では「 S 上 $\text{grad}(f) \neq 0$ 」ということをも明記すべきです。(4)では xy 平面との交わりで尖った感じになっているものは減点しました。真横から見ると双曲線なので、そのように描いてください。(6)は、例えば“ $T_q S = x - 2y + z - 4$ ”のような答案がありました。左辺は集合、右辺は多項式(あるいは数)ですから、等号で結ばれるのは明らかに変です。“ $\forall u \in \mathbb{R}^3$ について $u \cdot \text{grad}(f)(q) = 0$ だから...”のような答案も誤りです。“ $u \in T_q S$ ”とすべきです。
3. Ω の形が見えにくいかもしれませんが、見えなくても(5)以外はどうかなるはず。 (1)では $r \geq 0$ に言及しないと2乗を外せません。(3)の $\text{rot} V$ の計算間違いが多いのが気になりました。(4)では当然 Gauss の発散定理を使うわけですが、そのときに V が Ω 全体で定義されていることに言及すべきです。(2)はそのためのヒントです。そこに注意しないと、誤った結果が出る場合があります。教科書の例題 2.29などを参照してください。(5)について、単連結領域において $\text{rot} V = 0$ と同値なのは閉曲線に沿った線積分がいつも0になることですが、これを面積分と混同している答案が非常に目立ちました。
4. (2)はやや難しいと思っていましたが、7/5のレポートとほぼ同一の(1)も壊滅状態だったのは意外でした。(1)の S は閉曲面ではないので Gauss の発散定理は適用外です(実は、少し考察を加えれば使えます)。(2)の C は $\tilde{\ell}(t) := (\cos t, (\sin t)/\sqrt{2}, (\sin t)/\sqrt{2})$ でパラメータ付けできるので、定義通りの計算も可能ですが、試験時間内には多分無理です。Gauss/Stokes の定理の内容を把握していない人がたくさんいます。何をどこで積分するのか、要復習です。
 C と略解の C'' のような関係を「ホモローク」(homologue)とよびます。ホモロークな二つの閉曲線に沿った W の積分が等しいことの意味は、3年次の「ホモロジー論」で明らかになる、かもしれません。

(8/9)