幾何入門 中間試験（2012 年 6 月 7 日）

担当：境 圭一

答案用紙は 4 枚あります．大問ごとに指定された用紙を使ってください．すべてに学籍番号と名前を記入してください．裏面使用の場合は，裏面の右上にも名前を書いてください．要点が押さえられていれば，必ずしも全ての計算過程を書く必要はありません．計算用紙 1 枚は提出不要です．

ベクトルの成分表示は縦，横のどちらで書いても差し支えない．$\mathbb{R}^n$ の通常の内積を $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$ で表すものとする．特に断らなければ，考えている閉曲線の周期を T で表す．

1. (1) $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$ に対し，$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ を計算せよ．また，$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ を三辺とする平行六面体の体積を計算せよ．

   (2) $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y)=x^2+y^3$ に対し，$\mathrm{grad}(f)$ を計算せよ．

   (3) $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(x,y)=\begin{pmatrix}x^2-2xy+3y^2\\x^2+xy+y^2\end{pmatrix}$ に対し，$\mathrm{div}\boldsymbol{V}$, $\mathrm{rot}\boldsymbol{V}$ を計算せよ．

   (4) 二つの C^∞ 級関数 $g,h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ に対し，等式 $\mathrm{grad}(gh)=g\,\mathrm{grad}(h)+h\,\mathrm{grad}(g)$ を示せ．

2. (1) $\mathbb{R}^2$ 上の二つのベクトル場 $\boldsymbol{V}(x,y)=\begin{pmatrix}x+y\\x-y\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{W}(x,y)=\begin{pmatrix}x-y\\x+y\end{pmatrix}$ を考える．$\mathrm{div}\boldsymbol{V}$, $\mathrm{rot}\boldsymbol{V}$, $\mathrm{div}\boldsymbol{W}$, $\mathrm{rot}\boldsymbol{W}$ を計算せよ．

   (2) $\mathrm{grad}(f)=\boldsymbol{V}$ となる関数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ で，$f(\boldsymbol{0})=0$ をみたすものを求めよ．

   (3) 二つの曲線 $\boldsymbol{\ell}(t)=\begin{pmatrix}\cos t\\\sin t\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{m}(t)=\begin{pmatrix}\cos t\\-\sin t\end{pmatrix}$ に対し，線積分 $\displaystyle\int_0^\pi \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{\ell}$, $\displaystyle\int_0^\pi \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{m}$ を計算せよ．

   (4) $\mathrm{grad}(g)=\boldsymbol{W}$ となる関数 $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ は存在するか．存在するならそれを一つ求め，存在しないならそのことを証明せよ．

3. (1) Ω を放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x+2$ で囲まれる領域とする．Ω を図示せよ．また，境界 $\partial\Omega$ を表す区分的に正則な閉曲線 $\boldsymbol{\ell}$ で，Ω に適合する向きのものを一つ具体的に式で表せ．それが条件をみたすことの証明は省いてよい．

   (2) $\boldsymbol{\ell}(t)$ において Ω の内側から外側に向かう単位法ベクトルを $\boldsymbol{n}(t)$ とする（定義される点でのみ考える）．ベクトル場 $\boldsymbol{V}(x,y)=\begin{pmatrix}-x^2+4xy+y^2+2x\\x^2+2xy-2y^2-y\end{pmatrix}$ に対し，線積分 $\displaystyle\int_0^T \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\,d\boldsymbol{\ell}$ を計算せよ．

   (3) 線積分 $\displaystyle\int_0^T \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{\ell}$ を計算せよ．

4. (1) $L:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,\dfrac{x^2}{4}+y^2=4\right\}$, $M:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,x^2+\dfrac{y^2}{4}=\dfrac{1}{4}\right\}$ とおき，L と M で囲まれる領域を Ω とおく．Ω を図示せよ．

   (2) Ω は弧状連結であることを示せ．

   (3) L を表す正則な閉曲線 $\boldsymbol{\ell}$ で，Ω に適合する向きのものを一つ具体的に式で表せ．それが条件をみたすことの証明は省いてよい．

   (4) Ω 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}$ に対し，$\displaystyle\int_0^T \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{\ell}$ を計算せよ．

   (5) Ω は単連結ではないことを示せ．

配点：各 25 (**1**: $(3+4)+5+(4+4)+5=25$, **2**: $5+5+(4+4)+7=25$, **3**: $7+8+10=25$, **4**: $5\times5=25$)