幾何入門 中間試験（2012 年 6 月 7 日）略解

担当：境 圭一

1. (1) $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$. $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ を三辺とする平行六面体の体積は，$|(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}| = 6$.

   (2) $\mathrm{grad}(f) = \begin{pmatrix} 2x \\ 3y^2 \end{pmatrix}$.

   (3) $\mathrm{div}\boldsymbol{V} = 3x$, $\mathrm{rot}\boldsymbol{V} = 4x - 5y$.

   (4) $\mathrm{grad}(gh) = \left(\dfrac{\partial(gh)}{\partial x}, \dfrac{\partial(gh)}{\partial y}\right) = \left(\dfrac{\partial g}{\partial x}h + g\dfrac{\partial h}{\partial x}, \dfrac{\partial g}{\partial y}h + g\dfrac{\partial h}{\partial y}\right) = g\,\mathrm{grad}(h) + h\,\mathrm{grad}(g)$.

2. (1) $\mathrm{div}\boldsymbol{V} = 0$, $\mathrm{rot}\boldsymbol{V} = 0$, $\mathrm{div}\boldsymbol{W} = 2$, $\mathrm{rot}\boldsymbol{W} = 2$.

   (2) $f(x, y) = \dfrac{x^2}{2} + xy - \dfrac{y^2}{2}$.

   (3) $\boldsymbol{V} = \mathrm{grad}(f)$ より $\displaystyle\int_0^\pi \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{\ell} = f(\boldsymbol{\ell}(\pi)) - f(\boldsymbol{\ell}(0)) = 0$. または $\dfrac{d\boldsymbol{\ell}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ だから

$$\int_0^\pi \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_0^\pi \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = \int_0^\pi (\cos 2t - \sin 2t)dt = 0.$$

   $\boldsymbol{V} = \mathrm{grad}(f)$ であり，$\boldsymbol{\ell}$ と $\boldsymbol{m}$ は始点，終点が共通だから

$$\int_0^\pi \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{m} = \int_0^\pi \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{\ell} = 0.$$

   (4) $\mathbb{R}^2$ は単連結であり，$\mathrm{rot}\boldsymbol{W} = 2 \neq 0$ だから，$\mathrm{grad}(g) = \boldsymbol{W}$ となる g は存在しない．

3. (1) 領域 Ω は図 1 の通り．$\partial\Omega$ については，例えば次のように定義される周期 6 の閉曲線 $\boldsymbol{\ell}$ が求めるもの：

$$\boldsymbol{\ell}(t) := \begin{cases} (t,\ t^2) & -1 \le t \le 2 \\ (-t+4,\ -t+6) & 2 \le t \le 5 \end{cases}$$

   (2) 上の $\boldsymbol{\ell}$ の場合 $T = 6$. $\mathrm{div}\boldsymbol{V} = 1$ だから，Gauss の発散定理より

$$\int_0^6 \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\,d\boldsymbol{\ell} = \int_\Omega dxdy = \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2)dx = \frac{(2-(-1))^3}{6} = \frac{9}{2}.$$

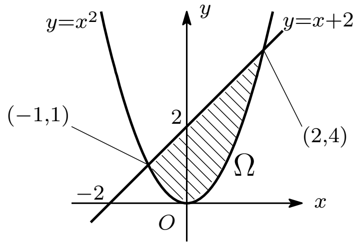

図 1: 3. (1) の領域 Ω

(3) $\mathrm{rot}\boldsymbol{V}(x,y)=-2x$ だから，Green の公式より

$$\int_0^6 \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{\ell} = -2\int_\Omega x\,dxdy = -2\int_{-1}^2 x\left(\int_{x^2}^{x+2} dy\right)dx = -2\int_{-1}^2 x(x+2-x^2)dx$$
$$= -2\left[\frac{x^3}{3}+x^2-\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^2 = -\frac{9}{2}.$$

4. (1) Ω は図 2 の通り．

(2) 任意の二点 $p,q\in\Omega$ を結ぶ Ω 内の連続な曲線が存在することを示す．線分 pq が全て Ω 内に入っていれば，それを取ればよい．そうなっていないとき，線分 pq は M と二点 p',q' で交わり，M は線分 $p'q'$ を切り取っていることがわかる．線分 $p'q'$ を，M 上の弧 $p'q'$ でおきかえれば，p,q を結ぶ曲線を得る．

(3) 例えば $\boldsymbol{\ell}(t)=\begin{pmatrix}4\cos t\\ 2\sin t\end{pmatrix}$.

(4) Ω 内の閉曲線 $\tilde{\boldsymbol{\ell}}(t)=\begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix}$ を考える．$\boldsymbol{\ell}$ と $\tilde{\boldsymbol{\ell}}$ で囲まれる有界領域を Ω' とすると，$\tilde{\boldsymbol{\ell}}$ は Ω' に適合した向きを定めている．$\boldsymbol{\ell}$, $\tilde{\boldsymbol{\ell}}$ はいずれも周期 2π．$\boldsymbol{V}$ は Ω' 上で定義され $\mathrm{rot}\boldsymbol{V}=0$ だから，Green の公式より

$$\int_0^{2\pi}\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{\ell}+\int_0^{2\pi}\boldsymbol{V}\cdot d\tilde{\boldsymbol{\ell}} = \int_{\Omega'}\mathrm{rot}\boldsymbol{V}\,dxdy = 0.$$

よって

$$\int_0^{2\pi}\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{\ell} = -\int_0^{2\pi}\boldsymbol{V}\cdot d\tilde{\boldsymbol{\ell}} = -\int_0^{2\pi}\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sin t\\ -\cos t\end{pmatrix}dt = 2\pi.$$

(5) Ω が単連結だと仮定する．$\mathrm{rot}\boldsymbol{V}=0$ だから，Ω 内の任意の閉曲線 $\tilde{\boldsymbol{\ell}}$ に対し $\displaystyle\int_0^T \boldsymbol{V}\cdot d\tilde{\boldsymbol{\ell}}=0$（$T$ は $\tilde{\boldsymbol{\ell}}$ の周期）が成り立つが，これは (4) に矛盾する．

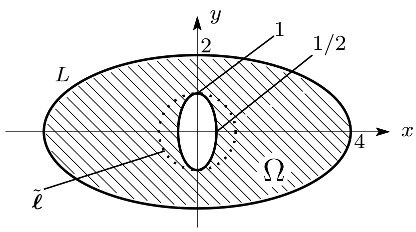

図 2: 4. (1) の領域 Ω

配点：各 25 (**1**: $(3+4)+5+(4+4)+5=25$, **2**: $5+5+(4+4)+7=25$, **3**: $7+8+10=25$, **4**: $5\times 5=25$)