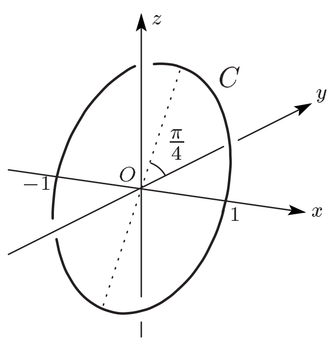
注．ベクトルの成分表示は縦，横のどちらで書いても差し支えない．スカラーの 0 とベクトルの $\mathbf{0}$ は必要に応じて区別すること．特に断らない限り，関数やベクトル場は C^∞ 級であるとする．

1. (1) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を二変数関数とし，写像 $\boldsymbol{\varphi}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ を $\boldsymbol{\varphi}(x,y):=(x,\,y,\,f(x,y))$ で定義する．$\dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial y}$ を f を使って表せ．また，任意の $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ に対し，$\dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial x}(a,b)$ と $\dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial y}(a,b)$ は一次独立であることを示せ．
   (2) $g(x,y,z):=x^2+y^3+z^4$ に対し，$\mathrm{grad}(g)$ を計算せよ．
   (3) $h(x,y,z):=x^2y^2z^2$ に対し，$\mathrm{div}(\mathrm{grad}(h))$ を計算せよ．
   (4) $\mathbb{R}^3$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(x,y,z):=(y^2-z^2,\,z^2-x^2,\,x^2-y^2)$ に対し，$\mathrm{div}\boldsymbol{V}$, $\mathrm{rot}\boldsymbol{V}$ を計算せよ．
   (5) $\mathbb{R}^3$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{W}=(W_1,\,W_2,\,W_3)$ に対し，$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\boldsymbol{W})=0$ を示せ．

2. $f(x,y,z):=x^2+y^2-z^2-4$ とおき，$S:=f^{-1}(0)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid f(x,y,z)=0\}$ とする．
   (1) $\mathrm{grad}(f)$ を計算し，$\mathrm{grad}(f)(p)=\mathbf{0}$ となる点 $p\in\mathbb{R}^3$ を求めよ．
   (2) S は曲面であることを示せ．
   (3) S を平面 $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid z=k\}$ で切った切り口を求め，xy 平面上に図示せよ．
   (4) S の概形を図示せよ．
   (5) $q:=(1,-2,-1)\in S$ であることを示し，$\mathrm{grad}(f)(q)$ を求めよ．
   (6) q において S に接する平面（q を通る）を表す方程式を求めよ．

3. $\mathbb{R}^3$ 内の領域 $\Omega:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid (x^2+y^2+z^2+3)^2\le 16(x^2+y^2)\}$ を考える．
   (1) $(x,y,z)\in\Omega$ に対し $x=r\cos\theta,\,y=r\sin\theta\ (r\ge 0)$ とおくと，$(r-2)^2+z^2\le 1$ であることを示せ．
   (2) 任意の $z\in\mathbb{R}$ に対し，$(0,0,z)\in\mathbb{R}^3$ は Ω に含まれないことを示せ．
   (3) $(x,y)\neq(0,0)$ のとき定義されるベクトル場 $\boldsymbol{V}(x,y,z):=\left(\dfrac{-y}{x^2+y^2},\,\dfrac{x}{x^2+y^2},\,0\right)$ に対し，$\mathrm{div}\boldsymbol{V}$, $\mathrm{rot}\boldsymbol{V}$ を計算せよ．
   (4) $T:=\partial\Omega$ とおくと，T は閉曲面である（証明は不要）．面積分 $\displaystyle\int_T \boldsymbol{V}\cdot d\mathbf{S}$ を計算せよ．
   (5) Ω は単連結でないことを示せ．

4. (1) $S:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2+z^2=1,\ z\ge 0\}$ とし，向き $\boldsymbol{n}:S\to\mathbb{R}^3$ を，$\boldsymbol{n}(0,0,1)=(0,0,1)$ となるように定める．ベクトル場 $\boldsymbol{V}(x,y,z):=(xz,\,yz,\,z^2)$ に対し，面積分 $\displaystyle\int_S \boldsymbol{V}\cdot d\mathbf{S}$ を計算せよ．
   (2) $(x,z)\neq(0,0)$ のとき定義されるベクトル場 $\boldsymbol{W}(x,y,z):=\left(\dfrac{-z}{z^2+x^2},\,0,\,\dfrac{x}{z^2+x^2}\right)$ を考える．xy 平面内の閉曲線 C' を $\boldsymbol{\ell}(t):=(\cos t,\,\sin t,0)$ で表されるものとし，C' を x 軸のまわりに $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転して得られる曲線を C とする（下図参照）．$\boldsymbol{\ell}$ から自然に定まる C の向きについて，線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{W}\cdot d\boldsymbol{\ell}$ を計算せよ．



配点：30, 30, 25, 15 $(6\times 5=30,\ 5\times 6=30,\ 5\times 5=25,\ 8+7=15)$