幾何入門 期末試験（2012 年 8 月 2 日）略解

担当：境 圭一

1. (1) $\dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x}=\left(1,0,\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$, $\dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial y}=\left(0,1,\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$. $k\dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x}(a,b)+l\dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial y}(a,b)=\mathbf{0}$ とすると

$$\left(k,\,l,\,k\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)+l\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)=\mathbf{0}$$

だから $k=l=0$. よって $\dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x}(a,b)$ と $\dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial y}(a,b)$ は一次独立.

(2) $\mathrm{grad}(g)=(2x,\,3y^2,\,4z^3)$.

(3) $\mathrm{div}(\mathrm{grad}(h))=2(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)$.

(4) $\mathrm{div}\boldsymbol{V}=0$, $\mathrm{rot}\boldsymbol{V}=-2(y+z,\,z+x,\,x+y)$.

(5) $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\boldsymbol{W})=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial W_3}{\partial y}-\dfrac{\partial W_2}{\partial z}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial W_1}{\partial z}-\dfrac{\partial W_3}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial W_2}{\partial x}-\dfrac{\partial W_1}{\partial y}\right)=0$.

2. (1) $\mathrm{grad}(f)=2(x,\,y,\,-z)$ だから，$\mathrm{grad}(f)(p)=\mathbf{0}\iff p=\mathbf{0}$.

(2) $f(\mathbf{0})=-4\neq 0$ だから $\mathbf{0}\notin S$. よって S 上では $\mathrm{grad}(f)(p)\neq\mathbf{0}$ だから，S は曲面である.

(3) 切り口は円 $x^2+y^2=k^2+4$. 図は省略.

(4) 図 1 の通り．例えば yz 平面で切ると，切り口は双曲線 $y^2-z^2=4$ である.

(5) $f(q)=1^2+(-2)^2-(-1)^2-4=0$ より $q\in S$. また $\mathrm{grad}(f)(q)=2(1,\,-2,\,1)$.

(6) $\mathrm{grad}(f)(q)$ に直交し，q を通る平面だから，$(x-1)-2(y+2)+(z+1)=0$, つまり $x-2y+z=4$.

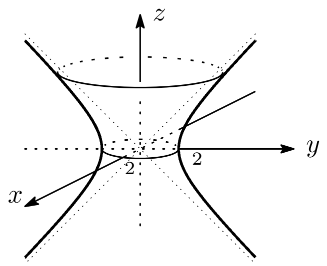

図 1: 問題 2 の曲面 S

3. (1) $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ を S の条件式に代入すると $(r^2+z^2+3)^2\leq(4r)^2$. ここで $r^2+z^2+3>0$, $r\geq 0$ より $r^2+z^2+3\leq 4r$. 平方完成すると $(r-2)^2+z^2\leq 1$.

(2) $(0,0,z)$ を S の条件式に代入すると $(z^2+3)^2\leq 0$. これをみたす実数 z は存在しない.

(3) $\mathrm{div}\boldsymbol{V}=0$, $\mathrm{rot}\boldsymbol{V}=\mathbf{0}$.

(4) T は $\mathbb{R}^3$ を二つの領域に分け，一方が有界，もう一方が非有界であるが，(1) より Ω が有界であることがわかる．(2) より $\boldsymbol{V}$ は Ω 上で定義される．(3) と Gauss の発散定理より $\displaystyle\int_T \boldsymbol{V}\cdot d\mathbf{S}=\int_\Omega \mathrm{div}\boldsymbol{V}\,dxdydz=0$.
（向きの入れ方は答に影響しない）

(5) 閉曲線 $\boldsymbol{\ell}(t):=(2\cos t,\,2\sin t,\,0)$（周期 2π）を考えると，$\boldsymbol{\ell}(t)\in\Omega$ である：

$$((2\cos t)^2+(2\sin t)^2+0+3)^2=49<64=16((2\cos t)^2+(2\sin t)^2).$$

もし Ω が単連結なら，$\mathrm{rot}\boldsymbol{V}=\mathbf{0}$ より，$\boldsymbol{\ell}$ に沿った $\boldsymbol{V}$ の線積分は 0 になるはずだが

$$\int_0^{2\pi}\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{\ell}=\int_0^{2\pi}\begin{pmatrix}-(\sin t)/2\\(\cos t)/2\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\sin t\\2\cos t\\0\end{pmatrix}dt=2\pi\neq 0$$

だから，Ω は単連結ではありえない．

4. (1) $U:=\{(x,y,0)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2\leq 1\}$ とし，S の（局所）座標 $\boldsymbol{\varphi}:U\to S$ を $\boldsymbol{\varphi}(x,y):=(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2})$ で定める（注：S が境界つき曲面だから，U を定める不等式に等号が入る）．簡単のため $s:=\sqrt{1-x^2-y^2}$ とおくと，$\dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial x}\times\dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial y}=\left(\dfrac{x}{s},\,\dfrac{y}{s},\,1\right)$ は外向きベクトルだから $\boldsymbol{\varphi}$ は向きを保つ．$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\varphi}(x,y))=(xs,\,ys,\,s^2)$ だから，定義通り計算すると

$$\int_S\boldsymbol{V}\cdot d\mathbf{S}=\int_U\begin{pmatrix}xs\\ys\\s^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x/s\\y/s\\1\end{pmatrix}dxdy=\int_U dxdy=(U\text{ の面積})=\pi.$$

(2) 例えば，平面 $y=-1$ 内の閉曲線 C'' を $\boldsymbol{m}(t):=(\cos t,\,-1,\,-\sin t)$ で表されるものとすると，向きも込めて $\partial S=C\cup C''$ となる曲面が存在する（図 2 右を参照のこと）．S は y 軸と交わらないように取れるから，y 軸以外で定義される $\boldsymbol{W}$ は S のまわりでも定義される．計算により $\mathrm{rot}\boldsymbol{W}=\mathbf{0}$ がわかるから，Stokes の定理より

$$\int_C\boldsymbol{W}\cdot d\boldsymbol{\ell}+\int_{C''}\boldsymbol{W}\cdot d\boldsymbol{m}=\int_{C\cup C''}\boldsymbol{W}\cdot d\boldsymbol{\ell}=\int_S\mathrm{rot}\boldsymbol{W}\cdot d\mathbf{S}=0,$$

つまり $\displaystyle\int_C\boldsymbol{W}\cdot d\boldsymbol{\ell}=-\int_{C''}\boldsymbol{W}\cdot d\boldsymbol{m}$ である．後者は定義通りの計算が容易であり

$$-\int_{C''}\boldsymbol{W}\cdot d\boldsymbol{m}=-\int_0^{2\pi}\begin{pmatrix}\sin t\\0\\\cos t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sin t\\0\\-\cos t\end{pmatrix}dt=2\pi.$$

問題 3 の補足．(1) より，Ω は図 2 左のようになる．xz 平面上に円板 $D:(x-2)^2+z^2\leq 1$ を考え，D を z 軸のまわりに一回転させてできるドーナツ型の図形が Ω で，境界 $T=\partial\Omega$ はトーラスである．略解中の $\boldsymbol{\ell}$ は D の中心の軌跡で，Ω 内で一点につぶれない．T が曲面であることは，$f:=(x^2+y^2+z^2+3)^2-16(x^2+y^2)$ に対し，T 上で $\mathrm{grad}(f)\neq\mathbf{0}$ であることからわかる（各自証明を試みよ）．

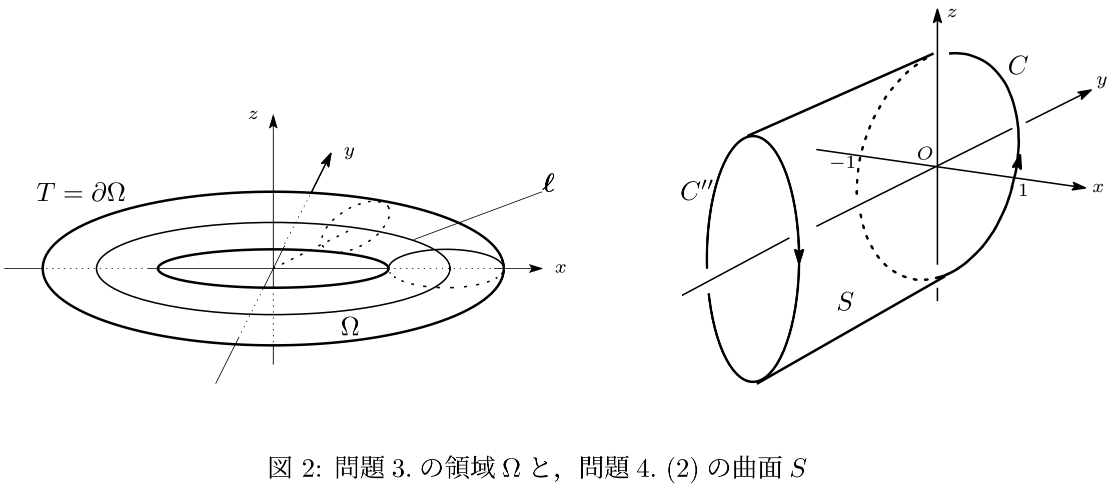

図 2: 問題 3. の領域 Ω と，問題 4. (2) の曲面 S