トポロジー 演習・レポート問題 1（2012 年 10 月 1 日）

担当：境 圭一

【レポート問題】（10/15 の講義開始までに提出してください）

X を位相空間とし，$A \subset X$ を部分集合とする．A には X からの相対位相を入れる．
任意の $x \in A$ に対して，$x \in X$ を対応させるという写像

$$i : A \to X$$

が定義される．これを**包含写像**と呼ぶ.

(1) i は単射であることを示せ.

(2) X の任意の部分集合 $B \subset X$ に対し，$i^{-1}(B) = A \cap B$ であることを示せ.

(3) i は連続写像であることを示せ.

【演習問題】（提出の必要はありません）

1. 位相空間の同相 $\approx$ という関係は**同値関係**であることを確かめよ.

2. $\mathbb{R}^2$ から原点を除いた空間 $X := \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ は**弧状連結**であることを示せ．つまり，任意の $x, y \in X$ に対し，連続写像 $f : [0,1] \to X$ で，$f(0) = x$, $f(1) = y$ をみたすものを構成せよ.

3. 任意の三角形 $X, Y \subset \mathbb{R}^2$ は同相であることを示せ.

4. $X, Y \subset \mathbb{R}$ を，$X := [0,1) \cup [2,3]$, $Y := [0,2]$ で定め，$\mathbb{R}$ の部分集合として相対位相を入れる．$f : X \to Y$ を
$$f(x) := \begin{cases} x & 0 \le x < 1, \\ x-1 & 2 \le x \le 3 \end{cases}$$
で定義する．f は連続な全単射だが同相でないこと，つまり f^{-1} が連続でないことを示せ.
（この問題は北海道大学の石川剛郎先生のサイトから拝借しました）

5. $D^n := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\boldsymbol{x}| \le 1\}$ を n 次元円板とする．また，$\mathrm{Int}D^n := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\boldsymbol{x}| < 1\}$ を D^n の**内部** (interior) と呼ぶ.

   (1) $\mathrm{Int}D^n$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合であること，D^n は**コンパクト** (compact) であることを示せ.

   (2) $f : \mathrm{Int}D^n \to \mathbb{R}^n$, $f(\boldsymbol{x}) := \left(\tan \dfrac{\pi |\boldsymbol{x}|}{2}\right) \cdot \boldsymbol{x}$ は同相写像であることを示せ.

   (3) D^n と $\mathbb{R}^n$ は同相ではないことを示せ.（ヒント：D^n のコンパクト性）

後日略解を掲載します.

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/12_topology/12_topology.html