

模範解答ではありません．書き方は各自検討すること．

【レポート問題】

- (1) $i(x) = i(y) \Rightarrow x = y$ をいえばよい． $i(x) = x \in X$ だから明らかであろう．
- (2) 定義通り書けば $i^{-1}(B) = \{x \in A \mid i(x) \in B\}$ ．これは $A \cap B$ に他ならない．
- (3) B を X の開集合とすれば，(2) より $i^{-1}(B) = A \cap B$ ．これは相対位相の定義から A の開集合．

【演習問題】

1. 鎌田先生の「集合と位相」§4, 定理 2.7 (証明は略してありますが)．
2. 多くの x, y に対しては x と y を結ぶ線分 $f(t) := (1-t)x + ty$ が答えだが，この線分が原点を通る場合はダメ．その場合は原点を通らないよう「少し変形」すればよい．やり方はいろいろあり，具体的に式で書くこともできるが省略．
3. 「三角形」を内部も含む意味で捉えるなら，次のようにすればよい． X の一つの頂点から他の頂点に向かう二辺を表すベクトルをそれぞれ a, b とすると， X 上の任意の点は $sa + tb$ ($s, t \geq 0, s + t \leq 1$) の形に一意的に表せる． Y のほうでも同様に二辺を選んでベクトル c, d を決めておく． $f: X \rightarrow Y$ を $f(sa + tb) := sc + td$ で定めれば， f は同相写像 (確かめよ)．
4. 逆写像 $g: Y \rightarrow X$ は具体的に求まる．

$$g(y) = \begin{cases} y & 0 \leq y < 1, \\ y + 1 & 1 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

例えば， $2 \in X$ の ϵ 開近傍 $U := [2, 2 + \epsilon)$ に対し， $g^{-1}(U) = [1, 1 + \epsilon) \subset Y$ は開でない．

5. (1) D^n がコンパクトであるのは， \mathbb{R}^n 内の有界閉集合であることによる．鎌田先生の「集合と位相」§3, 定理 4.11 等を見よ．
- (2) 略． f は原点を中心に $\text{Int} D^n$ を拡大する写像である． x が D^n の境界に近づくほど $f(x)$ は無限に遠くに行く．
- (3) $f: D^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ を連続写像とする． D^n はコンパクトで，コンパクト集合の連続像はコンパクトだから (鎌田先生の「集合と位相」§4, 定理 6.2)， $f(D^n)$ はコンパクト，特に有界である．従って連続写像 f は全射になり得ない．

注．連続でない全射 $f: D^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ は存在する．考えてみると面白いかもしれない．