トポロジー 演習・レポート問題 2（2012 年 10 月 15 日）

担当：境 圭一

【レポート問題】（10/22 の講義開始前までに提出してください）
2 次元円板

$$D^2 := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |\boldsymbol{x}| \leq 1\}$$

は**可縮**（一点からなる空間 $\{*\}$ とホモトピー同値）であることを示せ.
（ヒント：$\mathbb{R}^n$ が可縮であること（例 2.6）の証明と同様）

【演習問題】以下，I は閉区間 $[0,1]$, $S^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ とする.

1. $f : S^1 \to \mathbb{R}^2$ を包含写像，$f(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{x}$ とする．また，$c : S^1 \to \mathbb{R}^2$ を，全ての $\boldsymbol{x} \in S^1$ に対し $c(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{0}$（原点への**定値写像**）とする．$f$ と c は**ホモトピック** ($f \simeq c$) であることを示せ. つまり，連続写像 $F : S^1 \times I \to \mathbb{R}^2$ で，$F(\boldsymbol{x},0) = f(\boldsymbol{x})$, $F(\boldsymbol{x},1) = c(\boldsymbol{x})$ であるもの（**ホモトピー**）を構成せよ.

2. $Y := \mathbb{R}^2 \setminus \{x \text{ 軸}\}$ とする．三つの定値写像 $c_i : \{*\} \to Y$ $(i=1,2,3)$ を
$$c_1(*) := (-1,1), \quad c_2(*) := (1,2), \quad c_3(*) := (0,-1)$$
と定義する．$c_1 \simeq c_2$, $c_1 \not\simeq c_3$, $c_2 \not\simeq c_3$ であることを示せ.

3. 任意の連続関数 $f,g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対し，$f \simeq g$ であることを示せ.

4. 位相空間 W,X,Y,Z の間に，次のように写像 f,g,g',h が定まっているとする：
$$W \xrightarrow{f} X \underset{g'}{\overset{g}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{h} Z$$
このとき，$g \simeq g'$ ならば $h \circ g \circ f \simeq h \circ g' \circ f$ であることを示せ.
（ヒント：g と g' の間のホモトピー F を取り，$h \circ F \circ f$ を考えよ）

5. 位相空間のホモトピー同値 “$\simeq$” という関係は同値関係であること（補題 2.9）を確かめよ. （ヒント：(iii) の証明で前問を使う）

6. 任意の三角形（内部も含む）は可縮であることを示せ.（ヒント：レポート問題と同様）

7. 2 次元球面
$$S^2 := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\boldsymbol{x}| = 1\}$$
と，$\mathbb{R}^3$ から原点 $\boldsymbol{0}$ を除いた空間
$$X_3 := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}\}$$
はホモトピー同値であることを示せ.（ヒント：講義でやった $S^1 \simeq X_2$ と同様）