トポロジー 演習・レポート問題 2（2012 年 10 月 15 日）略解

担当：境 圭一

模範解答ではありません．書き方は各自検討すること．

【レポート問題】

講義でやった $\mathbb{R}^n \simeq \{*\}$（例 2.6）の証明で，$\mathbb{R}^n$ を D^2 に置き換えればよい．
「定値写像だから恒等写像とホモトピック」というのは間違い なので注意．

【演習問題】

1. f と c の間のホモトピーとして，例えば円周を原点に向かって縮めていく写像を取れる：
$$F : S^1 \times I \to \mathbb{R}^2, \quad F(\boldsymbol{x}, t) := (1-t)\boldsymbol{x}.$$

2. c_1 と c_2 の間のホモトピーは，例えば $F : \{*\} \times I \to \mathbb{R}^2$, $F(*, t) := (2t-1,\, t+1)$ で与えられる．このように，$\{*\}$ からの写像の間のホモトピーとは，2 点をつなぐ曲線に他ならない．同様に，c_1 と c_3 の間のホモトピーとは，2 点 $(-1, 1)$ と $(0, -1)$ をつなぐ曲線のことだが，そのような曲線は必ず x 軸を通る（中間値の定理）．従って $Y := \mathbb{R}^2 \setminus \{x \text{ 軸}\}$ の中ではホモトピーでつなげないことになり，$c_1 \not\simeq c_3$ がわかる．$c_2 \not\simeq c_3$ も同様．

3. 例えば $F(\boldsymbol{x}, t) := (1-t)f(\boldsymbol{x}) + tg(\boldsymbol{x})$. 作り方はいろいろある．

   注意．同様に，任意の連続写像 $f, g : X \to \mathbb{R}^n$ に対し $f \simeq g$ がわかる．これは $\mathbb{R}^n$ が可縮であることによる．

4. ヒントの通りなので略．

5. (i) は $f = g = \mathrm{id}_X$ を考える．(ii) は明らかであろう．(iii) は $X \simeq Y$, $Y \simeq Z$ が写像
$$X \underset{g_1}{\overset{f_1}{\rightleftarrows}} Y \underset{g_2}{\overset{f_2}{\rightleftarrows}} Z \quad (\simeq)$$
で与えられているとすれば，$f_2 \circ f_1 : X \to Z$ により $X \simeq Z$ で，$g_1 \circ g_2 : Z \to X$ がホモトピー逆写像．これは次のように確かめられる：
$$(g_1 \circ g_2) \circ (f_2 \circ f_1) = g_1 \circ (g_2 \circ f_2) \circ f_1 \simeq g_1 \circ \mathrm{id}_Y \circ f_1 = g_1 \circ f_1 \simeq \mathrm{id}_X.$$
最初の $\simeq$ のところで，$g_2 \circ f_2 \simeq \mathrm{id}_Y$ と前問を使った．$(f_2 \circ f_1) \circ (g_1 \circ g_2) \simeq \mathrm{id}_Z$ も同様．

6. 講義でやった例 2.6 で，$\mathbb{R}^n$ を三角形に，$g(*)$ を例えば三角形の一つの頂点に置き換えればよい．詳細は略．

7. $i : S^2 \to X_3$ を $i(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{x}$（包含写像），$p : X_3 \to S^2$ を $p(\boldsymbol{x}) := \dfrac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}$ とすれば，$p \circ i = \mathrm{id}_{S^2}$.
$i \circ p \simeq \mathrm{id}_{X_3}$ を示すには，例えば $F : X_3 \times I \to X_3$ を
$$F(\boldsymbol{x}, t) := \frac{\boldsymbol{x}}{(1-t) + t\,|\boldsymbol{x}|}$$
で定めればよい．

   注意．同様に，n 次元球面 S^n と $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ はホモトピー同値であることもわかる．

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/12_topology/12_topology.html